Hagvaxtarlíkan Solows

$$Y = \sqrt{ANK}$$

Y = Þjóðarframleiðsla,
A = Tæknistuðull,
N = Mannafli og K=Fjármagnsstofn

$$k \equiv \frac{K}{N}\ ,\ y \equiv \frac{Y}{N}$$

$$y = \frac{Y}{K} = \sqrt{A}\,\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}}\,\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{N}} = \sqrt{A}\sqrt{k}$$

Í fyrstu liðum verður engin breyting á tæknistigi og því skulum við gefa okkur þá forsendu að A = 1.

a) Árlegur vöxtur þjóðarframl.

Ath, sjá má hvernig árlegur vöxtur þjóðarframleiðslunnar skiptist á milli mannaflaaukningar og fjármagnsaukningar á töflu sem fylgir með í viðauka. Í upphafi er hagkerfið ekki í svokölluðu hagvaxtarjafnvægi, því fjármagn er ekki í jafnvægi. Hagkerfið eykur með minnkandi hraða við fjármagn á mann, þangað til það ratar loks í hagvaxtarjafnvægi.

b) Óbreytt tækni (A=1)

$$Y = (1-s)Y + I \quad \Rightarrow \quad I = sY$$

$$\Delta K = I - \delta K = sY - \delta K$$

$$\dot{k} = \dot{K} - \dot{L} = \frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L}$$

$$\dot{k} = \frac{sY - \delta K}{K} - n = s\frac{Y}{K} - \delta - n$$

$$\dot{k} = s\frac{y}{n} - \delta - n$$

Í jafnvægi er $\dot{k} = 0$

þ.e. $s\frac{y}{k} - \delta - n = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{\delta + n}{s}k$

Ofangreind jafna lýsir því hvernig fjármagnsstofninn á mann hefur áhrif á þjóðarframleiðslu á mann. Sú jafna nægir þó ekki til að lýsa framleiðslunni, því henni er einnig lýst með framleiðslufalli þjóðfélagsins. Finnum raunverulegan jafnvægispunkt með því að leysa út fyrir k og y:

$$\sqrt{A}\sqrt{k} = \frac{\delta + n}{s}k$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{A}\frac{s}{\delta + n}$$

$$\boxed{k = A\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^2}$$

Leysum einnig út fyrir y:

$$y = \frac{\delta + n}{s}k$$

$$y = A\frac{\delta + n}{s}\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^2$$

$$\boxed{y = A\frac{s}{\delta + n}}$$

Nú getum við stungið inn réttum tölum og fundið jafnvægispunkt hagkerfisins:

Þjóðartekjur á mann:

$$\boxed{y = A\frac{s}{\delta + n} = 1\frac{0{,}2}{0{,}01 + 0{,}04} = 4}$$

Fjármagn á mann:

$$\boxed{A\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^2 = 1\left(\frac{0{,}2}{0{,}01 + 0{,}04}\right)^2 = 16}$$

Hagvaxtarstigið:

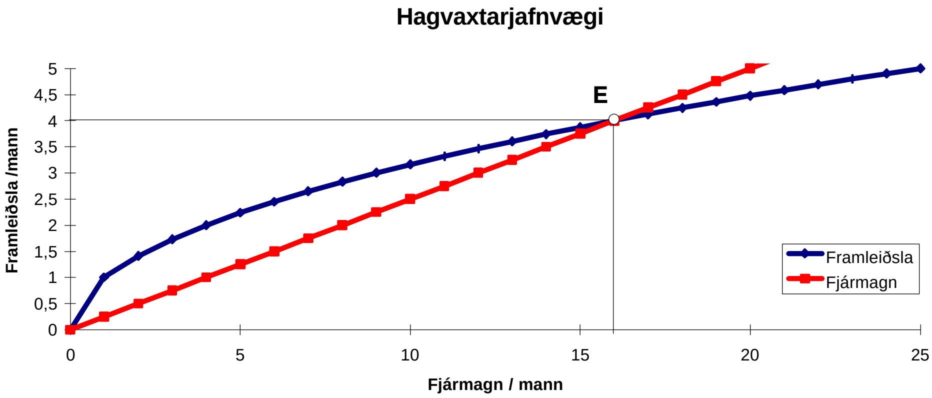
$$y = \frac{Y}{N} \Rightarrow Y = y \cdot N$$

Þar sem $\dot{y} = 0$ í jafnvægi gildir:

$$\boxed{\dot{Y} = \dot{N} \quad \text{eða} \quad g = n = 0{,}01 = 1\%}$$

M.ö.o: Hagvöxtur er jafn vexti vinnuaflsins.

Jafnvægispunkt þjóðarbúskapsins má sjá á eftirfarandi mynd



Ef kerfið raskast leitar það ávallt sjálfkrafa í jafnvægispunktinn E

c) lækkað sparnaðarhlutfall

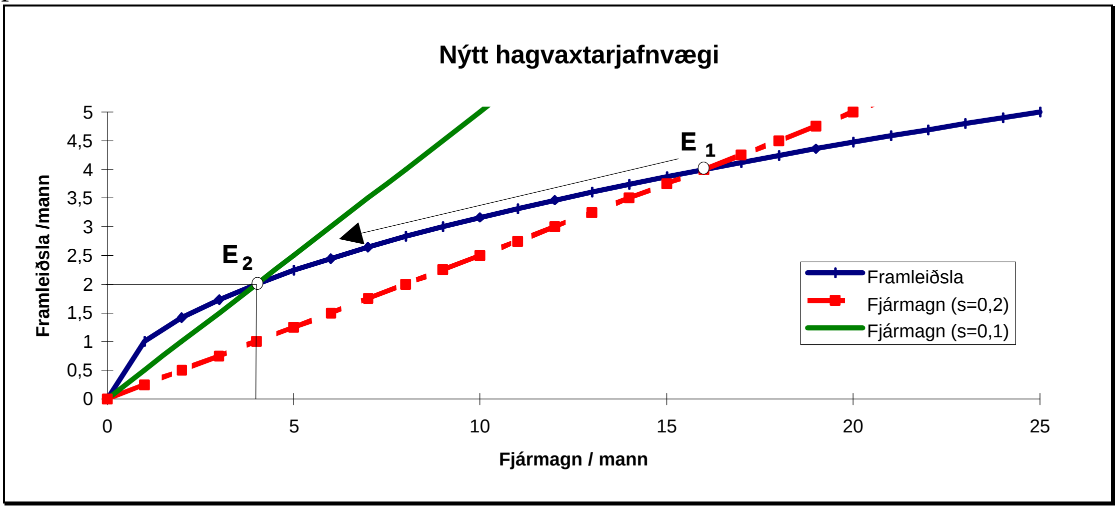
Í þessum lið er könnuð áhrif þess að sparnaðarhlutfall minnki úr 20% í 10%, þ.e. s2 = 0,1. Líkanið er óbreytt og því þarf aðeins að stinga inn í þær jöfnur sem áður hafa verið leiddar út:

$$\boxed{y_2 = A\frac{s}{\delta + n} = 1\frac{0{,}1}{0{,}01 + 0{,}04} = 2}$$

og

$$\boxed{k_2 = A\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^2 = 1\left(\frac{0{,}1}{0{,}01 + 0{,}04}\right)^2 = 4}$$

Þegar sparnaðarhlutfall lækkar úr 20% í 10% lækkar jafnvægisframleiðsla og fjármagn á einstakling. Hagvöxtur til lengri tíma litið er sá sami og fyrir lækkunina. Sparnaðarlækkunin verður til þess að þjóðfélagið flyst smám saman í nýjan jafnvægispunkt: E2. Þessi tilflutningur gerist ekki samstundis og því mælist neikvæður hagvöxtur/mann þann tíma sem það tekjur þjóðfélagið að komast á þennan punkt. Þegar jafnvægi er náð verður hagvöxtur eftir sem áður jafn fólksfjölguninni, samkvæmt þeirri röksemdarfærslu sem sett var fram í liðnum hér að ofan



d) Tímabundnar tækniframfarir (a=1.2)

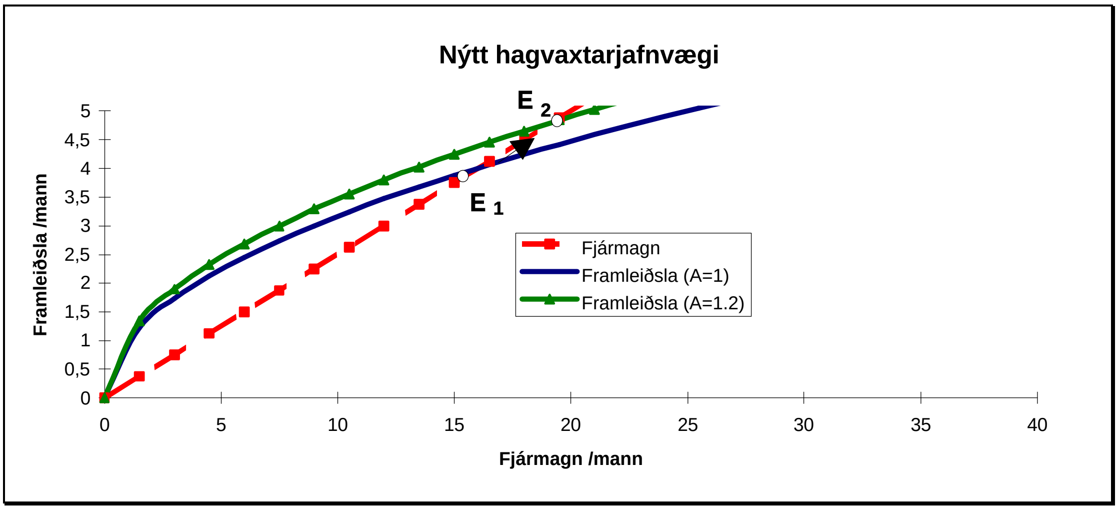
Líkanið er óbreytt og því þarf aðeins að stinga inn í þær jöfnur sem áður hafa verið leiddar út:

Þjóðartekjur á mann

$$y_3 = A\frac{s}{\delta+n} = 1.2\left(\frac{0.2}{0.01+0.04}\right) = 4.8$$

Fjármagn á mann

$$k_3 = A\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^2 = 1.2\left(\frac{0.2}{0.01+0.04}\right) = 19.2$$



Hagkerfið siglir inn í nýtt hagvaxtarjafnvægi þegar tímabundnar tækniframfarir eiga sér stað þar sem að framleiðslukúrfa hagkerfisins flyst út. Á meðan hagkerfið færist að jafnvægispunktinum mælist tímabundinn hagvöxtur. Þegar hagkerfið er komið í jafnvægipunkt er hagvöxtur = langtímahagvöxtur, þ.e. jafn fólksfjölguninni.

E) Varanlegar tækniframfarir (a' =0.01)

Þegar varanlegar tækniframfarir eiga sér stað í hagkerfinu er ekki hægt að finna hagvaxtarjafnvægi í framl/mann - fjármagn/mann rúminu. Það verður að taka vöxt tækniframfara með í reikninginn og rannsaka framleiðslu og fjármagn á afkastaeiningu, en afkastaeining er fólksfjöldi á hverjum tíma margfaldað mep tæknistigi. Táknum L sem afkastaeiningu:

$$L = N\cdot e^{bt}$$

þar sem að b = vöxtur tækniframfara = 0,01

$$L = N\cdot e^{bt}$$

$$L = N_0\cdot e^{nt}\cdot e^{bt} = N_0\cdot e^{(b+n)t}$$

$$\Rightarrow \dot{L} = \frac{\Delta L}{L} = (b+n)$$

Þetta gefur okkur að þeir þættir sem stuðla að vexti afkastaeininga er vöxtur vinnuaflsins og tækniframfarir. Því næst skal framleiðslufall hagkerfisins útleitt, en afkastaeiningar notaðar í stað vinnuafls:

$$Y = \sqrt{L}\sqrt{K}$$
$$y^{\wedge} = \frac{Y}{L} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}}\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \sqrt{k^{\wedge}}$$

Fjármagn á afkastaeiningu (y - hattur) og framleiðsla á afkastaeiningu (k - hattur) eru:

$$y^{\wedge} = \frac{Y}{L} \quad ; \quad k^{\wedge} = \frac{K}{L}$$

Hagkerfið er í jafnvægi þegar að vöxtur fjármagns á afkastaeiningu er enginn:

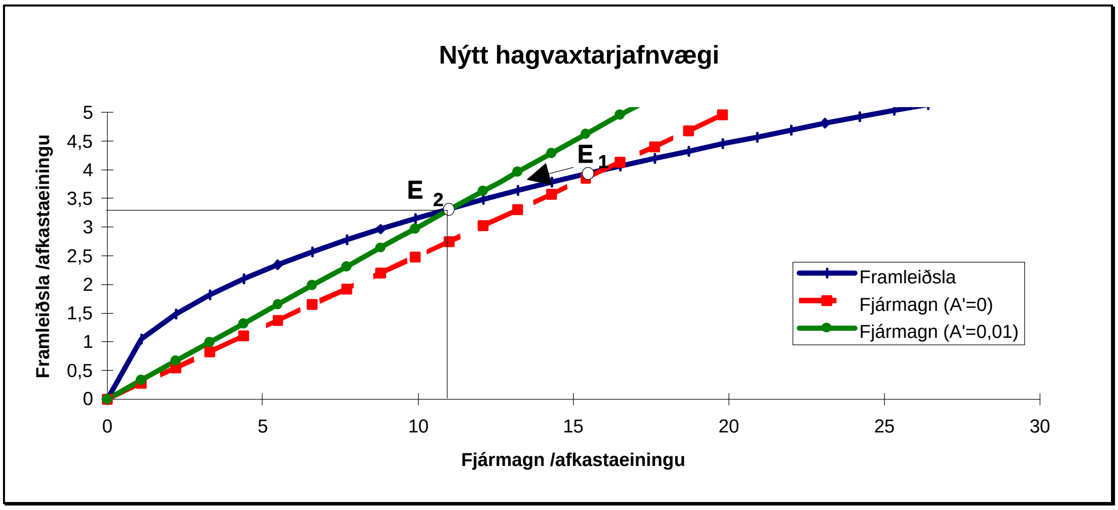
$$k^{\cdot\wedge} = 0$$
$$k^{\cdot\wedge} = K^{\cdot} - L^{\cdot} = s\frac{Y}{K} - \delta - (b+n)$$
$$s\frac{y^{\wedge}}{k^{\wedge}} - \delta - b - n = 0$$
$$y^{\wedge} = \left(\frac{\delta + b + n}{s}\right)k^{\wedge}$$

Jafnvægi ríkir þegar framleiðslufall er jafn fjármagnsfalli:

$$\left(\frac{\delta + b + n}{s}\right)k^{\wedge} = \sqrt{k^{\wedge}}$$
$$k^{\wedge} = \left(\frac{s}{\delta + b + n}\right)^2$$

Stingum inn réttum gildum til þess að fá fjármagn á afkastaeiningu og þjóðarframleiðslu á afkastaeiningu:

$$k^{\wedge} = \left(\frac{0.2}{0.04 + 0.01 + 0.01}\right)^2 = 11.11111111$$
$$y^{\wedge} = \sqrt{11.111111} = 3.3333333$$



Þetta jafnvægi er greinilega í lægri k^ og y^ en fyrra jafnvægi. Á meðan hagkerfið flyst í hið nýja jafnvægi ríkir skammtímahagvöxtur þ.e. $\Delta Y/Y > 0$.

Hagvaxtarstigið í jafnvægi (þ.e. hagvöxtur til langs tíma) er:

$$Y = L\hat{y} \Rightarrow \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta L}{L} = (b + n)$$
$$g = (b + n) = 0.02$$

Sem sagt: Við varanlegar tækniframfarir á sér stað hagvöxtur bæði til skamms tíma og langtíma.

Atvinnuleysi

Í hagkerfi einu er nytjafallli heimilanna lýst með eftirfarandi jöfnu:

$$U = y - (3/5)N^{5/3}$$

U = Nyt, N = atvinna í vinnustundum

y = ráðstöfunartekjur heimilana, en þær eru skilgreindar sem:

$$y = (1-t)wN$$

þar sem t er tekjuskattsprósentan og w er tímakaup á raunverði.

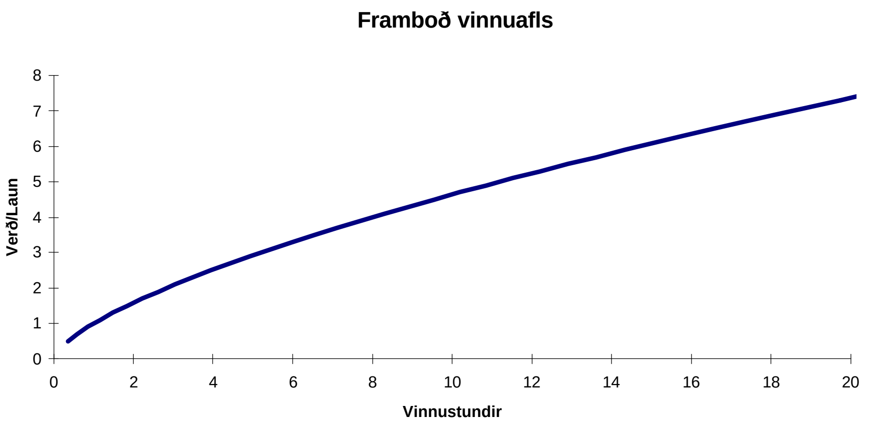
a) Framboðsfall vinnuafls

Við finnum framboðsfall vinnuafls með því að hámarka nytjafallið m.t.t. N:

$$\frac{\delta U}{\delta N} = (1-t)w - N^{2/3} = 0$$

Leysum út fyrir N og fáum framboðsfall vinnuafls

$$N = \left((1-t)w\right)^{3/2}$$



Framboðslína vinnuafls er kúpt. Hver punktur á línunni er sá hagstæðasti fyrir heimilinn, að gefnum launum eða vinnustundum, enda lýsir þessi ferill hámarki notagildisfalls heimila. Á notagildisfallinu má sjá að tveir þættir hafa áhrif á nytjar heimila: tekjur og frítími. Báðir þessir þættir hafa minnkandi jaðarnyt, og því er framboðskúrfan kúpt.

b) Vinnuframboðið þegar t = 0 og w = 1

Vinnuframboð er fundið með því að stinga viðeigandi tölum inn í jöfnum framboðs og þá fæst: N(t,w) = N(0,1) = 1. Framboð við tímaverði 1 og enginum tekjuskatti er þannig ein vinnustund á viku.

c) Eftirspurnarfall eftir vinnuafli

Framleiðslufall hagkerfisins er eftirfarandi:

$$Y = 2N^{1/2}$$

Í þessum útreikningum tökum við ekki fjármagn með í reikninginn og því getum við sagt að framleiðsla hagkerfisins sé jöfn brúttó launum, þ.e.:

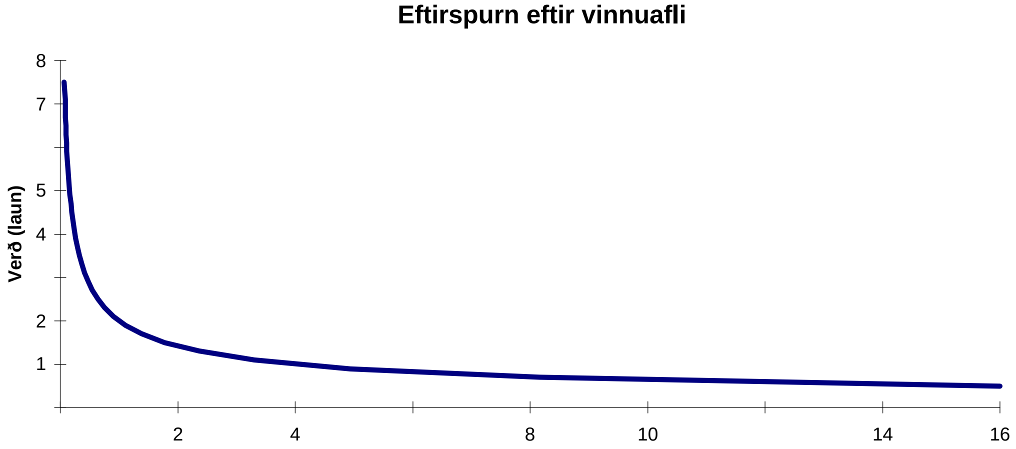
$$Y = wN \quad \text{eða} \quad Y = wN = 2N^{1/2}$$

Leysum út fyrir atvinnu (N) til þess að fá eftirspurnarfallið:

$$N^{1/2} = 2 / w$$

$$\boxed{N = \left(\frac{2}{w}\right)^2 \quad \text{og} \quad w = 2N^{-1/2}}$$

Eftirspurnarfallið má sjá á eftirfarandi mynd



d) Jafnvægi á vinnumarkaði (t=0)

frjálsa launaþróun. Finnum jafnvægispunkt með því að setja framboðsmagn = eftirspurnarmagn:

$$\left((1-t)w\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{w}\right)^2$$

$$\left((1-t)w\right)^{3/4} = \frac{2}{w}$$

$$(1-t)^{3/4} w^{7/4} = 2$$

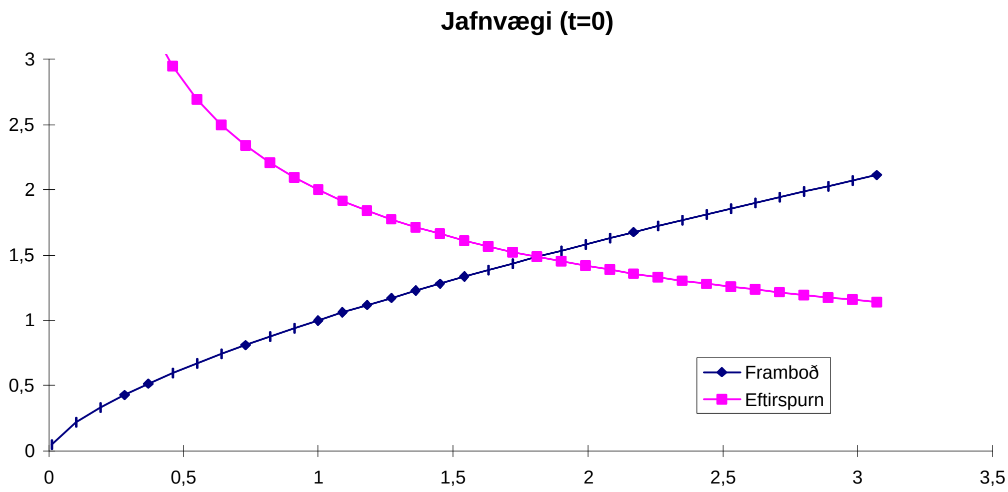
$$w = \left(\frac{2}{(1-t)^{3/4}}\right)^{4/7}$$

Leysum út fyrir w þegar t = 0:

$$w = (2)^{4/7} = 1.485994289$$

$$N = \left(\frac{2}{w}\right)^2 = \left(\frac{2}{1.485994289}\right)^2 = 1.811447329$$

Þ.e. jafnvægistímakaup er 1.495994289 við frjálsa markaðsmyndun. Framboðs- og eftirspurnarmagn er er 1.8114 í jafnvægi þessu og þjóðarframleiðsla 2.6928 (w*N*)



Þegar vinnumarkaður er í jafnvægi ríkir svokallað leitaratvinnuleysi, þ.e. fjöldi þeirra sem sækjast eftir vinnu er jafn þeim fjölda af stöðum sem eru ófylltar. Fólk tekur sér tíma til að meta atvinnutækifæri í boði, hefur ekki rétta menntun fyrir ákveðin störf eða býr langt frá næsta vinnustað sem hefur lausa stöðu. Í þessum jafnvægispunkti gildir einnig að þeir sem finna vinnu eru jafnmargir og þeir sem missa vinnu.

e) Jafnvægi á vinnumarkaði (t=0,25)

Formúlan fyrir vinnulaunum í jafnvægi var, eins og kom fram hér að ofan, eftirfarandi:

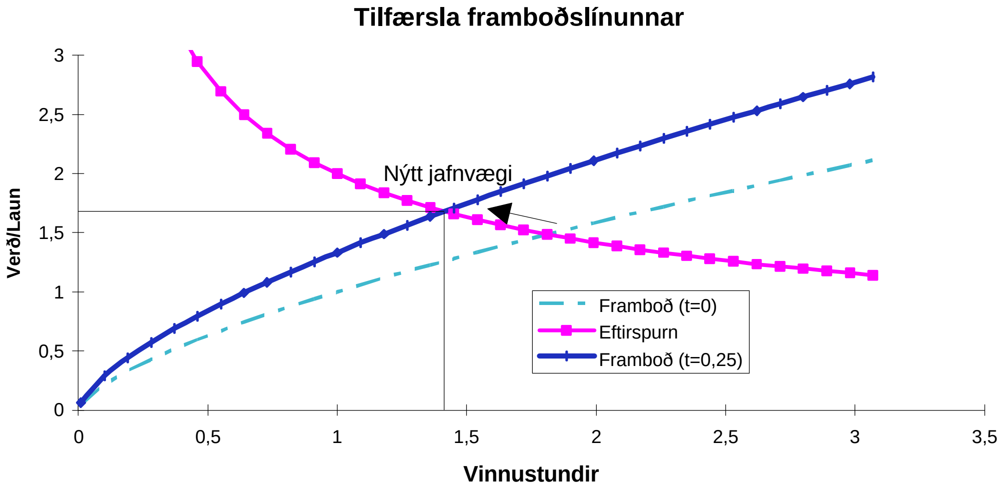
$$w = \left(\frac{2}{(1-t)^{3/4}}\right)^{4/7}$$

Stingum inn t = 0,25 og reiknum nýjan jafnvægispunkt:

$$w = \left(\frac{2}{(1-0.25)^{3/4}}\right)^{4/7} = 1.680979098$$

og

$$N = \left(\frac{2}{w}\right)^2 = \left(\frac{2}{1.680979098}\right)^2 = 1.415583086$$



Tekjuskattur hefur neikvæð áhrif á tekjur. Ef tekjuskattur er hækkaður verður frítími verðmætari en áður í samanburði við atvinnutekjur. Þetta þýðir að launakröfur heimila aukast, jafnvægislaun hækka og atvinna minnkar. Það að atvinna minnkar táknar ekki aukið atvinnuleysi. Fólk minnkar vinnu sína og nýtur þess að hafa meiri frítíma. Atvinnuleysi í þessu jafnvægi er leitaratvinnuleysi, líkt og í fyrra jafnvægi. Fjöldi atvinnulausra er því jafn fjölda lausra staða í þjóðfélaginu.

f) Nyt verkalýðsfélags hámörkuð

Gerum ráð fyrir því að allir vinnandi menn taki sig saman og myndi verkalýðsfélag. Verkalýðsfélagið hefur eftirfarandi nytjafall:

$$V = 2w^{1/2} - N^{-1/2}$$

Framboð vinnuafls er háð eftirspurn, þ.e. verð- og vinnutímaákvarðanir eru ekki teknar einhliða af framboðshliðinni, heldur skilyrtar af eftirspurnarhliðinni. Við setjum lausnina á vinnulaunum út frá framboðshlið inn í nytfallið.

$$V = 2\left(2N^{-1/2}\right)^{1/2} - N^{-1/2} = 2\sqrt{2}N^{-1/4} - N^{-1/2}$$

Nytfallið er síðan hámarkað:

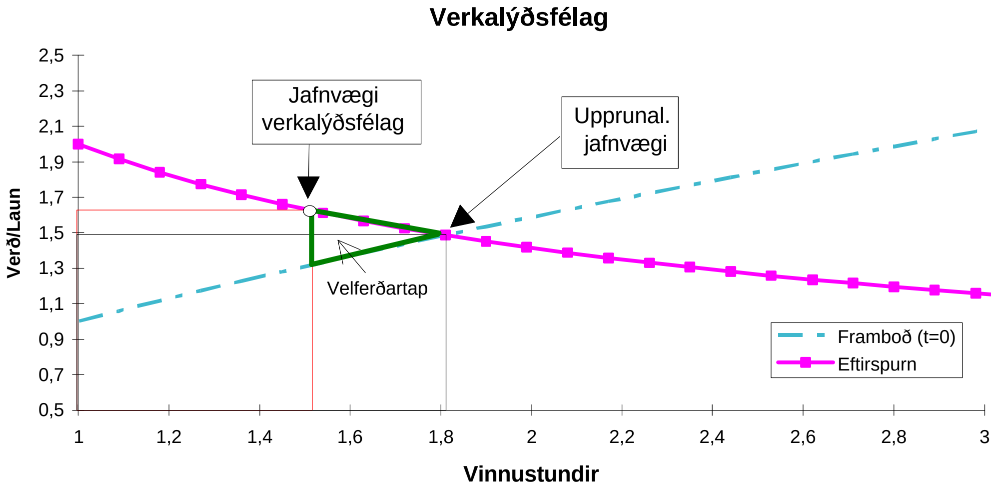
$$\frac{\delta V}{\delta N} = 2\sqrt{2} \cdot (-0.25)N^{-3/4} + \frac{1}{2}N^{-3/2} = 0$$

Leysum út fyrir N:

$$N^* = \left(\frac{0.5}{2\sqrt{2} \cdot 0.25}\right)^{-4/3} = 1.587401052$$

og w:

$$w^* = 2N^{-1/2} = 1.587401052$$



Eins og sést á línuritinu hér að ofan er jafnvægi verkalýðfélagsins í punkti þar sem launin eru hærri en vinnan minni en heimilin óska eftir (m.v. gefið framboð), þ.e. nyt heimilanna eru ekki í hámarki þegar nyt verkalýðsfélagsins eru í hámarki. Ef að verkalýðsfélaginu tækist með samningum að koma launum upp í jafnvægispunkt sinn, myndi það þýða hærri laun fyrir þá sem héldu vinnuni en óhjákvæmilega munu aðrir missa vinnuna og verða atvinnulausir. Ef að hægt er að komast fram hjá samningum verkalýðsfélags myndu þeir sem missa vinnuna ráða sig í vinnu á lægri kjörum og grundvöllur verkalýðsfélagsins myndi smátt saman falla. Ef að verkalýðsfélagið er hinsvegar með sterka stöðu, t.d. vegna lagasetninga um skylduaðild, geta samningar þess við atvinnurekendur ollið varanlegu biðatvinnuleysi og ójafnvægi á vinnumarkaðinum.

Allar þvinganir á frjálsan markað verða til þess að velferðartap á sér stað. Velferðartap er sá umframábati bæði kaupenda og seljenda sem fyrnist við markaðshindranir. Velferðartap í þessu dæmi er græni þríhyrningurinn.