

Verkefni 3

Rekstrarhagfræði III

Sigurgeir Örn Jónsson - kt: 280674-5919

Kennari: Ásgeir Daníelsson

1. apríl 1996

1 Jaðarkostnaður

Sett er fram eftirfarandi fullyrðing:

Jaðarkostnaður sem er því samfara að nýta sæti sem annars væri ónotað í flugvél er næstum enginn. Af þeirri ástæðu leiðir frjáls samkeppni til þess að verðið stefnir á núll. Þetta er ástæðan fyrir rekstrarerfiðleikum flugfélaga og þeim mörgu gjaldþrotum sem orðið hafa í greininni að undanförmu.

Síðari fullyrðingin stenst ekki. Fyrirtæki starfa svo lengi sem þau eiga fyrir breytilegum kostnaði ef von er um bjartari tíma framundan. Ef fyrirtæki sér ekki fram á að fá greitt fyrir bæði föstum og breytilegum kostnaði í framtíðinni leggur það niður laupana. Þess vegna getur verðið aldrei stefnt á núll nema eiginlegur kostnaður við flugrekstur stefni á núll. Rekstrarerfiðleikar og gjaldþrot flugfélaga eru einfaldlega vegna þess að markaðurinn hrindir út óhagkvæmlega reknum fyrirtækjum. Ákveðið millibilsástand getur skapast þegar fyrirtæki fara að bjóða vörur á undirverði en slíkt ástand er þó ekki varanlegt.

Jaðarkostnaður þess að nýta eitt sæti til viðbótar í flugvél er næstum enginn. Flufélög líta þó ekki á þennan jaðarkostnað þegar þau ákveða framboðsmagn og verð á flugferðum heldur sá jaðarkostnaður sem felst í því að fljúga eitt flug í viðbót.

2 Framleiðslumöguleikar hagkerfis

Framleiðslumöguleikum hagkerfis \mathbf{X} er lýst með eftirfarandi formúlu:

$$E^2 + 40A^2 = 1000 \quad (1)$$

þar sem að E er magn einkavörunnar og A er magn almannagæða. Í \mathbf{X} búa 10 einstaklingar sem allir hafa eins nytjaföll. Nytjafall einstaklings nr. i er: $U_i = (E_i^* A)^{0.5}$. Allir í \mathbf{X} hafa sömu tekjur.

2.1 Fullkomin samkeppni (a)

Eftirspurn hvers einstaklings eftir almannagæðum (A_i) byggir á því hversu mikið aðrir spyrja eftir almannagæðum. Ein lausnin er sú að allir gerist laumufarþegar og framleitt magn almannagæða verði því núll. Nyt hvers einstaklings verða þá núll að sama skapi.

2.2 Hámörkun nytja (b)

Nyt einstaklinganna eru í hámarki þegar að:

$$\begin{aligned} RPT_{E \text{ fyrir } A} &= SMRS_{E \text{ fyrir } A} \\ &= \sum_{i=1}^{10} MRS_{E \text{ fyrir } A}^i \end{aligned}$$

Leiðum út jaðarskiptihlutfall einstaklings:

$$\begin{aligned} MRS_{E \text{ fyrir } A}^i &= \frac{MU_E^i}{MU_A^i} \\ &= \frac{\frac{1}{E} (E_i A)^{\cdot 5}}{(E_i A)^{\cdot 5} / A} = \frac{A}{E_i} \end{aligned} \quad (2)$$

Finnum einnig RTP. Diffum framleiðslujaðarinn

$$2E \cdot dE + 80A \cdot dA = 0$$

$$RPT_{E \text{ fyrir } A} = -\frac{dA}{dE} = \frac{2E}{80A}$$

$$\begin{aligned} RPT &= 10MRS^i \\ \frac{2E_i \cdot 10}{80A} &= 10 \frac{A}{E_i} \\ E_i &= 20A \\ E &= 10 \cdot E_i = 200A \end{aligned} \quad (3)$$

Stingum skiptihlutfallinu inn í framleiðslujaðar og leysum út fyrir A og E:

$$20A^2 + 40A^2 = 1000 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{5}{3}\sqrt{6} \\ E^* &= \frac{100}{3}\sqrt{6} \end{aligned}$$

Nyt hvers einstaklings fáum við með því að stinga hámarksgildum inn í nytjafall hans. Þar sem að nytjafall allra einstaklinga er það sama gerum við ráð fyrir því að $E_i^* = E^*/10 = 10/3 \cdot \sqrt{6}$

$$U^* = \left(\frac{10}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{6} \right)^{0.5} = 5.7735$$

2.3 Skattlagning (c)

Þessum lið sleppt vegna tímaskorts

3 Eyja, tvö vötn og 20 fiskimenn

Á Eyjunni eru tvö vötn og 20 fiskimenn. Hver fiskimaður má veiða í öðru vatninu og aflar sem nemur meðalafli í því vatni. Fjöldi fiska sem veiðist í X-vatni ræðst af: $F_x = 10L_x - 0.5L_x^2$, þar sem L_x er fjöldi fiskimanna sem veiðir í X-vatni. Í Y-vatni er samsvarandi formúla: $F_y = 5L_y$.

3.1 Veiði ef fiskimenn velja sjálfir (a)

Hámörkum framleiðslu með tilliti til vinnuafis fyrir hvort vatn fyrir sig. Fyrstu gráðu skilyrði eru eftirfarandi.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial L_x} &= 10 - 1L_x = 0 \\ L_x^* &= 10\end{aligned}\tag{5}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial L_y} = 5 = 0 \quad -> \text{hámarkslausn á jaðri hliðarskilyrðis}\tag{6}$$

Hliðarskilyrði er: $L_x + L_y = 20$ og því er $L_x^* = 5$ og $L_y^* = 20 - 10 = 10$

Fjöldi veiddra fiska verður þannig: $F = F_x + F_y = 10 \cdot 10 - 0.5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 = 100.0$

3.2 Pareto hagkvæmni (b)

Þegar Pareto hagkvæmni ríki er ekki hægt að auka hag eins einstaklings án þess að ganga á hag annars. Pareto-skilyrðið í þessu dæmi er að:

$$\frac{\partial F_x}{\partial L_x} = \frac{\partial F_y}{\partial L_y}\tag{7}$$

$\partial F_y / \partial L_y = 5$ og því verður $\partial F_x / \partial L_x$ að vera 5. Finnum fjölda veiðimanna í vatni X sem gerir jaðarframleiðni 5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial L_x} &= 10 - L_x = 5 \\ L_x^{**} &= 5\end{aligned}\tag{8}$$

Fjöldi veiddra fiska verður því: $F = F_x + F_y = 10 \cdot 5 - 0.5 \cdot 5^2 + 5 \cdot 15 = 112.5$

3.3 Veiðileyfagjald (c)

Finna þarf það veiðileyfagjald per veiðimann í vatni X þannig að veiði nái Pareto hagkvæmni. Eftirfarandi verður að gilda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial L_x} &= 10 - t - L_x^{**} = 0 \\
&= 10 - t - 5 = 0 \\
\Rightarrow t &= 5
\end{aligned}
\tag{9}$$

Þ.e. ef að skatturinn 5 er lagður á hvern veiðimann sem veiðir í X þá verður jaðarafköst vinnuafis í hvoru vatni fyrir sig sá sami og niðurstaðan verður sú sama og í b lið.

4 Tvö fyrirtæki á markaði

Á markaði eru tvö fyrirtæki (1 og 2). Óbeina eftirspurnarfallið fyrir afurð fyrirtækis 1 er:

$$p_1 = 1000 - 2q_1 - q_2 \tag{10}$$

en óbeina eftirspurnarfallið fyrir afurð fyrirtækis 2 er:

$$p_2 = 2000 - q_1 - 3q_2 \tag{11}$$

Kostnaðarfall fyrirtækis 1 er: $c(q_1) = 10q_1$ en kostnaðarfall fyrirtækis 2 er: $c(q_2) = 15q_2$

4.1 Cournot (a)

Cournot gerði ráð fyrir því að fyrirtæki þekktu tengsl milli eigi framleiðslu og verðs, þ.e. $\partial P/\partial q_i \neq 0$ en að þau tækju ekki með í reikninginn áhrif framleiðslu annara fyrirtækja á eigin framleiðslu, þ.e. $\partial q_j/\partial q_i = 0$ fyrir $i \neq j$.

Líkjum eftir hagnaðarhámörkun fyrirtækjanna:

4.1.1 Fyrirtæki 1

$$\begin{aligned}
\text{Hám } \pi_1 &= TR - TC = p_1(q_1) \cdot q_1 - c(q_1) \\
&= 1000q_1 - 2q_1^2 - q_2q_1 - 10q_1 \\
&= 990q_1 - 2q_1^2 - q_1q_2
\end{aligned}
\tag{12}$$

Fyrstu gráðu skilyrði er eftirfarandi:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \pi_1}{\delta q_1} &= 990 - 4q_1 - q_2 = 0 \\
q_1^* &= \frac{495}{2} - \frac{1}{4}q_2
\end{aligned}
\tag{13}$$

4.1.2 Fyrirtæki 2

$$\begin{aligned}\text{Hám } \pi_1 &= TR - TC = p_2(q_2) \cdot q_2 - c(q_1) & (14) \\ &= 2000q_2 - q_1q_2 - 3q_2^2 - 15q_2 \\ &= 1985q_2 - q_1q_2 - 3q_2^2\end{aligned}$$

Fyrstu gráðu skilyrði er eftirfarandi:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\pi_2}{\delta q_2} &= 1985 - q_1 - 6q_2 = 0 \\ q_2^* &= \frac{1985}{6} - \frac{1}{6}q_1 & (15)\end{aligned}$$

4.1.3 Jafnvægi

Finum jafnvægi á markaðinum með því að finna skurðpunkt viðbragðsfallana, þ.e. leysum saman jöfnur (13) og (15):

$$\begin{aligned}q_1^* &= \frac{3955}{23} \approx 171.96 \\ q_2^* &= \frac{6950}{23} \approx 302.17\end{aligned}$$

Cournot jafnvægi

Finum jafnvægisverð út frá (10) og (11):

$$p_1^* = 1000 - 2 \cdot \frac{3955}{23} - \frac{6950}{23} = \frac{8140}{23} \approx 353.91 \quad (16)$$

$$p_2^* = 2000 - \frac{3955}{23} - 3 \cdot \frac{6950}{23} = \frac{21195}{23} \approx 921.52 \quad (17)$$

Hagnaður fyrirtækjanna m.v. jafnvægisframleiðslu er eftirfarandi:

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= 990q_1 - 2q_1^2 - q_1q_2 \\ &= 990 \cdot \frac{3955}{23} - 2 \cdot \left(\frac{3955}{23}\right)^2 - \frac{3955}{23} \cdot \frac{6950}{23} \\ &= \frac{31284050}{529} = 59138 & (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2^* &= 1985q_2 - q_1q_2 - 3q_2^2 \\
&= 1985 \cdot \frac{6950}{23} - \frac{3955}{23} \cdot \frac{6950}{23} - 3 \left(\frac{6950}{23} \right)^2 \\
&= \frac{144907500}{529} \approx 273927
\end{aligned} \tag{19}$$

4.1.4 Stöðugleiki

Líkan þetta er stöðugt þar sem að viðbragðsfall fyrirtækis 1 er brattari en viðbragðsfall fyrirtækis tvö m.v. mynd 1. Fyrirtækin stefna að jafnvægispunkti óháð því hvar upphafspunktur er.

4.2 Líkan Bertrands (b)

Umritum jöfnur (10) og (11) þannig að við fáum magn sem fall af verðum:

$$q_1 = \frac{1}{5}p_2 + 200 - \frac{3}{5}p_1 \tag{20}$$

$$q_2 = \frac{1}{5}p_1 + 600 - \frac{2}{5}p_2 \tag{21}$$

Hámörkum hagnað fyrirtækjanna

4.2.1 Fyrirtæki 1

$$\begin{aligned}
\text{Hám } \pi_1 &= p_1 \cdot q_1 - 10q_1 \\
&= (p_1 - 10) \left(\frac{1}{5}p_2 + 200 - \frac{3}{5}p_1 \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

Fyrstu gráðu skilyrði:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= \frac{1}{5}p_2 + 206 - \frac{6}{5}p_1 = 0 \\
p_1^* &= \frac{1}{6}p_2 + \frac{515}{3}
\end{aligned} \tag{23}$$

4.2.2 Fyrirtæki 2

$$\begin{aligned}
\text{Hám } \pi_2 &= p_2 \cdot q_2 - 15q_2 \\
&= (p_2 - 15) \left(\frac{1}{5}p_1 + 600 - \frac{2}{5}p_2 \right)
\end{aligned} \tag{24}$$

Fyrstu gráðu skilyrði

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} &= \frac{1}{5}p_1 + 606 - \frac{4}{5}p_2 = 0 \\
p_2^* &= \frac{1}{4}p_1 + \frac{1515}{2}
\end{aligned} \tag{25}$$

4.2.3 Jafnvægi

Leysum saman jöfnur (23) og (25) til þess að finna jafnvægi:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{7150}{23} \approx 310.87 \\ p_2 &= \frac{19210}{23} \approx 835.22 \end{aligned}$$

Finnum jafnvægismagn út frá (20) og (21):

$$q_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{19210}{23} + 200 - \frac{3}{5} \cdot \frac{7150}{23} = \frac{4152}{23} \approx 180.52 \quad (26)$$

$$q_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{7150}{23} + 600 - \frac{2}{5} \cdot \frac{19210}{23} = \frac{7546}{23} \approx 328.09 \quad (27)$$

og hagnað fyrirtækjanna:

$$\pi_1 = \left(\frac{7150}{23} - 10 \right) \cdot \frac{4152}{23} = \frac{28731840}{529} = 54313 \quad (28)$$

$$\pi_2 = \left(\frac{19210}{23} - 15 \right) \cdot \frac{7546}{23} = \frac{142355290}{529} \approx 269103 \quad (29)$$

Bertrand

4.2.4 Stöðugleiki

Líkan þetta er stöðugt þar sem að viðbragðsfall fyrirtækis 1 er brattari en viðbragðsfall fyrirtækis tvö m.v. mynd 2. Fyrirtækin stefna að jafnvægispunkti óháð því hvar upphafspunktur er. Athygli vekur að verð samkv. Bertrand líkaninu er lægri en samkv. Cornout, þ.e. nær samkeppnislausn.

4.3 Einokun (c)

Ef um eitt fyrirtæki er að ræða setjum við upp sameiginlegt hámarksfall. Lagrange fallið verður eftirfarandi:

$$L = p_1 \cdot q_1 - 10q_1 + p_2 \cdot q_2 - 15q_2 + \lambda(1000 - p_1 - 2q_1 - q_2) + \lambda(2000 - p_2 - q_1 - 3q_2)$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru:

$$\begin{aligned} L_{p_1} &= q_1 - \lambda_1 = 0 \\ L_{p_2} &= q_2 - \lambda_2 = 0 \\ L_{q_1} &= p_1 - 10 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ L_{q_2} &= p_2 - 15 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ L_{\lambda_1} &= 1000 - p_1 - 2q_1 - q_2 = 0 \\ L_{\lambda_2} &= 2000 - p_2 - q_1 - 3q_2 = 0 \end{aligned}$$

Þegar búið er að leysa út úr fgs koma eftirfarandi lausnir á jafnvægis-verði og magni í ljós:

$$\begin{aligned} p_1^* &= 505 \\ p_2^* &= \frac{2015}{2} = 1007.5 \\ q_1^* &= \frac{197}{2} = 98.5 \\ q_2^* &= 298 \end{aligned}$$

Þegar fyrirtækin haga sér eins og eitt einokunarfyrirtæki er dregið úr framboði þannig að verð hækkar. Jafnvægisverð í þessum lið eru töluvert hærri en verðin í liðum (a) og (b)

5 Leikjafræði

Eftirfarandi tafla sýnir niðurstöður úr leik sem A og B leika:

	<i>B</i>	
	-1,1	4,8
<i>A</i>	8,4	5,5

5.1 Hreinar Nash-jafnvægisáætlanir (a)

5.1.1 Skilgreining: Nash jafnvægi í hreinum aðgerðum

(r^*, c^*) er Nash-jafnvægi ef eftirfarandi gildir:

$$\begin{aligned} u_r(r^*, c^*) &\geq u_r(r, c^*) \text{ fyrir öll } r \\ u_c(r^*, c^*) &\geq u_c(r^*, c) \text{ fyrir öll } c \end{aligned}$$

Með því að líta á ábatafylkið (payoff matrix) má augljóslega sjá að það inniheldur eitt nash-jafnvægi, þ.e. reitinn neðst í hægra horninu. Nash-jafnvægisáætlun A er að velja neðri röð, en áætlun B er að velja hægri dálk. Hvorugur hefur hvata til þess að breyta áætlun sinni að gefinni áætlun hins.

5.2 Blandaðar Nash-jafnvægisáætlanir (b)

Blandaðar áætlanir fela það í sér að leikmenn setja ákveðin líkindi við hverja áætlun eftir ákjósanleika og láta hendingu ráða hvaða hreina áætlun verði fyrir valinu. Blandaðar áætlanir geta oft verið ábatameiri en hrein

$$\begin{aligned}P_e &= P(\text{A velur efri}) \\P_n &= P(\text{A velur neðri}) \\P_v &= P(\text{A velur vinstri}) \\P_h &= P(\text{B velur hægri})\end{aligned}$$

5.2.1 Vandamál A

$$\text{Hám } P_e(P_v \cdot (-1) + P_h \cdot 4) + P_n(P_v \cdot 8 + P_h \cdot 5)$$

$$\begin{aligned}\text{þ.a. } P_e + P_n &= 1 \\P_v + P_h &= 1 \\P_i &\geq 0\end{aligned}$$

Setjum upp Lagrange fall:

$$\begin{aligned}L &= 4P_hP_e - P_vP_e + 8P_nP_v + 5P_nP_h + \lambda_1(1 - P_e - P_n) \\&\quad + \lambda_2(1 - P_v - P_h) - \mu_1P_e - \mu_2P_n\end{aligned}$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru eftirfarandi:

$$\begin{aligned}L_{P_e} &= 4P_h - P_v - \lambda_1 = 0 \\L_{P_n} &= 8P_v + 5P_h - \lambda_1 = 0 \\L_{\lambda_2} &= 1 - P_v - P_h = 0\end{aligned}$$

Bráðarbirgðalausnir eru: $\{P_v = -\frac{1}{8}, \lambda_1 = \frac{37}{8}, P_h = \frac{9}{8}\}$ en þar sem að P_v má ekki vera neikvætt eru lausnirnar: $P_v = 0$ og $P_h = 1$.

5.2.2 Vandamál B

$$\text{Hám } P_v(P_e \cdot (-1) + P_n \cdot 4) + P_h(P_e \cdot 8 + P_n \cdot 5)$$

Setjum upp Lagrange fall:

$$\begin{aligned}L &= 4P_vP_n - P_vP_e + 8P_hP_e + 5P_nP_h + \lambda_1(1 - P_e - P_n) \\&\quad + \lambda_2(1 - P_v - P_h) - \mu_1P_e - \mu_2P_n\end{aligned}$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru eftirfarandi:

$$\begin{aligned}L_{P_v} &= 4P_n - P_e - \lambda_2 = 0 \\L_{P_h} &= 8P_e + 5P_n - \lambda_2 = 0 \\L_{\lambda_1} &= 1 - P_e - P_n = 0\end{aligned}$$

Bráðarbirgðalausnir eru $\{P_n = \frac{9}{8}, \lambda_2 = \frac{37}{8}, P_e = -\frac{1}{8}\}$ en þar sem að P_e má ekki vera neikvætt eru lausnirnar: $P_e = 0$ og $P_n = 1$.

Blandaða Nash-jafnvægis-áætlunin reynist því sú sama og hreina Nash-jafnvægis-áætlunin. Þetta má augljóslega sjá með því að strika út allar *strongly dominated* raðir og dálka, en þá stendur [5, 5] reiturinn einn eftir.

5.3 Endurtekinn leikur (c)

Staðan myndi ekki breytast þótt leikurinn væri leikinn oft. Hvatinn til þess að ná sem mestu út úr hverjum leik gerir það að verkum að [5, 5] reiturinn er eina lausnin.

Ef A og B geta gert samkomulag sín á milli er von á annari lausn. A og B geta gert samkomulag um áætlun sem byggist á happdrætti. Ef A og B eru óháðir m.t.t. áhættu gæti happdrættið litið út þannig að: $P(n, v) = 0.5$ og $P(e, h) = 0.5$. Væntur ábati leikmanna er því:

$$\begin{aligned}E[\pi_1] &= 0.5 \cdot 8 + 0.5 \cdot 4 = 6 \\E[\pi_2] &= 0.5 \cdot 4 + 0.5 \cdot 8 = 6\end{aligned}$$

Þetta happdrætti er þó ekki eina mögulega lausnin. Það hvaða happdrætti verður fyrir valinu byggist á nytjaföllum einstaklinganna m.t.t. áhættu. Þó má gera ráð fyrir að leikmaður taki aldrei þátt í óréttlátu happdrætti, þ.e. vongildi happdrættisins verður að vera meiri en vongildi hreinnar áætlunar.