# Hagrannsóknir 3 - Tímaraðagreining

Sigurgeir Örn Jónsson

Haust 1996

# Efnisyfirlit

# Kafli 1

# Upprifjun

## 1.1 Tímaraðir

### 1.1.1 Almennir eiginleikar

Tímaröð er vörpun, þ.e. $x : t \to R$. Þó er rétt að tala um $X(t, \omega)$ og $X : t \times - \to R$ þar sem að $\omega$ er útkoma óskilgreindrar hendingar Guðs. Tímaraðarannsóknum má skipta í eftirfarandi flokka eftir því hvort stærðir eru samfelldar eða ósamfelldar:

| | | $T$ | |
|---|---|---|---|
| | | Samfellt | Ósamfellt |
| $X$ | Samfellt | t.d. mathematical finance | hefðbundnar tímaraðir |
| | Ósamfellt | eldgos, survival, duration | t.d. spil |

### 1.1.2 Random walk

**Ósamfelldur tími**

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1.1}$$

þar sem $\varepsilon_t$ eru óháðar, þ.e. $E(\varepsilon_t) = 0$, $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$

**Samfelldur tími**

$$X_t | X_s \ \mathsf{s} \ N\left(X_s, (t-s)\,\sigma^2\right)$$

Þetta ferli kallast Brownian Motion

### 1.1.3 Saga tímaraðagreiningar

| | |
|---|---|
| 1950-1970 | Stór structural líkön |
| 1970 | Box-Jenkins |
| | hvernig á að álykta um tímaraðir |
| | aðferðafræðipakki |
| 1970-1984 | Deilur milli trúflokka |

### 1.1.4 Sístæðni

#### Sterk sístæðni

Ef $F\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots X_{t_n}\right) = F\left(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots X_{t_n}\right)$þá er tímaröð sterklega sístæði (*e. strongly stationary*).

#### Veik sístæðni

Skilgreinum eftirfarandi:

$$\mu_t = E\left(X_t\right) \tag{1.2}$$

$$\gamma_t\left(k\right) = E\left(X_{t+k} - \mu_{t+k}\right)\left(X_t - \mu_t\right) \tag{1.3}$$

Ef að: $\mu_t = \mu$ og $\gamma_t\left(k\right) = \gamma\left(k\right)$ $\forall k$ þá segjum við að röð sé veiklega sístæð (*e. weakly stationary).* Tímaröð er sögð vera veiklega sístæð af gráðu $n$ ef að moments upp að gráðu $n$ eru til og eru óháð tíma. Sumar tímaraðir hafa ekki covariance moment og flokkast því ekki undir veika sístæðni þrátt fyrir að vera sterklega sísstæðar.

#### Sjálffylgni og hlutsjálffylgni

Ef við höfum sístæðan feril getum við sett sjálffylgni og hlutsjálffylgni fram óháð tíma. Sjálffylgni er:

$$\gamma_k = Cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right) = E\left(Z_t - \mu\right)\left(Z_{t+k} - \mu\right)$$

og fylgni:

$$\rho_k = \frac{Cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right)}{\sqrt{Var\left(Z_t\right)}\sqrt{Var\left(Z_{t+k}\right)}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Eiginleikar fallanna í sístæðri röð eru eftirfarandi:

- $\gamma_0 = Var\left(Z_t\right); \ \rho_0 = 1$
- $|\gamma_k| \leq \gamma_0; \ |p_k| \leq 1$
- $\gamma_k = \gamma_{-k}$ og $\rho_k = \rho_{-k}$ fyrir öll $k$. Föllin eru því samhverf um tíma, $k = 0$. Sjálffylgniföll eru því gjarnan aðeins sett fram fyrir neikvæðar tafir.

### 1.1.5 Hlutsjálffylgnifallið

#### Notkun

Í tímaröðum sem eru AR processar getur verið erfitt að auðkenna gráðu processins. Viði viljum við því athuga fylgni milli $Z_t$ og $Z_{t+k}$ eftir að hafa fjarlægt línuleg tengsl við þær mælingar sem eru á milli (þ.e. $Z_{t+1}, Z_{t+2}, ...$ og $Z_{t+k-1}$). Fyrirbæri þetta sem kallað er hlutsjálffylgni (*e. partial autocorrelation*) má setja fram á eftirfarandi hátt:

$$\theta_k = Corr\left(Z_t, Z_{t+k} | Z_{t+1}, ..., Z_{t+k-1}\right) \tag{1.4}$$

Ein leið til þess að greina gráðu AR ferils að gefnu ákveðnu gagnasetti er að meta marktækni $\theta_{kk}$ fyrir hvert k frá einum og upp úr, þangað til ómarktækur stiki mælist. Röð $\theta_{kk}$, $k = 1, 2, ...,$ af hlutfjálffylgni köllum við hlutsjálffylgnifall. Við veljum gráðu AR($p$) úr frá hlutsjálffylgnifallinu þannig að:

$$\theta_{kk} \begin{cases} \neq 0 & \text{fyrir} \quad k = p \\ = 0 & \text{fyrir} \quad k > p \end{cases}$$

**Mat á hlutsjálffylgni**

Hægt er að reikna hlutsjálffylgni beint út frá fylgnistuðlum tímaraðar með ákveðnum útreikningi[1]. Einfaldara er þó með hjálp tölvupakka að meta hana með línulegri aðhvarfsgreiningu. Setjum upp kerfi þannig að:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{X}_p \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \tag{1.5}$$

þar sem að $y_p = (y_{p+1}, ..., y_t)'$, $\mathbf{e} = (e_{p+1}, ..., e_T)'$ og

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \end{bmatrix}$$

eða ef jafnan er metin með fasta, þ.e. $\mathbf{y}_p = \delta + \mathbf{X}_p \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$ þá er:

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} 1 & y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ 1 & y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \end{bmatrix}$$

Ef $e_t$ og þannig $y_t$ eru normaldreifð þá er LS metillinn með mati $\hat{\boldsymbol{\theta}}_p = \left(X_p' X_p\right)^{-1} X_p' y_p$ samkvæmur og asymptotically normaldreifður. Ath að þótt processinn sé metinn með fasta þá er fastinn ($v$) ekki miðgildi processinns heldur:

$$\mu = \frac{v}{1 - \theta_1 - \cdots - \theta_p} \tag{1.6}$$

### 1.1.6 Ergodic skilyrði

Sístæð tímaröð er einkennd með meðaltali, dreifni, sjálffylgni og hlutsjálffylgni. Hin réttu gildi þessara stika er hægt að reikna út ef að samansafn allra mögulegra realizations er þekkt. Hægt er að meta þessi gildi ef að hluti mögulegra realiazation er þekkt. Flestar tímaraðir eru hinsvegar aðeins ein realization af process og því verður að skipta út raunmati með tíma-meðaltali. Til þess að þetta sé hægt verða svokölluð Ergodic skilyrði að vera uppfyllt.

Metill fyrir meðaltal process þegar við höfum aðeins eina realization er úrtaksmeðaltal tímaraðarinnar:

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t$$

[1] William W. S. Wei, Time Series Analysis, bls 12-13

sem er tíma-meðaltal $n$ athuganna. Við sjáum að metillinn er óbjagaður:

$$E\left(\bar{Z}\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(Z\right) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

Til þess að ferillinn sé Ergodic þarf hann að uppfylla eftirfarandi skilyrði::

$$\begin{aligned} \bar{X} = & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \quad \text{er samleitið} \\ & \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T} X_t X_{t-k} \quad \text{er samleitið} \end{aligned}$$

Ekki er hægt að **mæla** með tölfræðilegum hætti hvort þessum skilyrðum sé uppfyllt eður ei. Skilyrði þessi eru nokkurn veginn það sama og að segja að *mælingar sem langt er á milli eru næstum því óháðar.*

### 1.1.7 Hvítt suð

Process $\{a_t\}$ er kallaður hvítt suð ef hann er röð af óháðum hendingum úr fastri dreifingu með fast meðaltal $E\left(a_t\right) = \mu_a$ (oftast 0) og fastan variance: $Var\left(a_t\right) = \sigma_a^2$ og $\gamma_k = Cov\left(a_t, a_{t+k}\right) = 0 \quad \forall k \neq 0$. Hvítt suð er því sístæður process með eftirfarandi eiginleikum:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \begin{cases} \sigma_a^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \\ \rho_k &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \\ \phi_{kk} &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.2 MA og AR kynning

Í tímaraðagreiningu eru til tvær nytsamar framsetningar á process:

### 1.2.1 MA

Ein framsetningin er að rita process $Z_t$ sem línulega samantekt af röð uncorrelated hendinga, þ.e.

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + ... = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

þar sem $\psi_0 = 1$ og $\{a_t\}$ er process með meðaltal 0 og endanlegan variance. Með því að nota bakvirkjann getum við umritað yfir á compact form:

$$\dot{Z}_t = \psi\left(B\right) a_t$$

þar sem að $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$, $B^j x_t = x_{t-j}$ og $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} B^j$. Eftirfarandi atriði einkenna processinn:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= \mu \\ Var(Z_t) &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \\ E(a_t Z_{t-j}) &= \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{fyrir } j = 0 \\ 0 & \text{fyrir } j > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Við getum því leitt út:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k}\right) \\ &= E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j a_{t-i} a_{t+k-j}\right) \\ &= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} \end{aligned}$$

Wold(1938) sannaði að sístæðan feril sem er algerlega nondeterministic (þ.e. hefur enga þætti sem má spá fyrir út frá fortíðargildum) má ávallt setja fram sem MA mode. (Wold's representation).

Fyrir fastan fjölda athuguna gildir að því fleiri stikar sem eru í líkaninu, því minni efficiency við mat á stikum.

# Kafli 2

# Sístæð tímaraðalíkön

## 2.1 Hrein spá

Gerum ráð fyrir því að við höfum vektor mælinga $X' = X_1, ..., X_n$. Ímyndum okkur að $X \sim N\left(0, \Gamma_{(n\times n)}\right)$ og $\gamma_{ij} = \gamma\left(i-j\right)$ enda er þá $\gamma\left(0\right) = \sigma^2$. Til þess að finna bestu spá fyrir $X_{n+1}$ þá verðum við að lágmarka eftirfarandi vandamál:

$$\underset{a}{Min} \quad E\left(X_{n+1} - a'X\right)^2 \tag{2.1}$$

Fyrstu gráðu skilyrði er eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} E\left(X_{n+1} - a'X\right)^2 &= 0 \\ E\left(X_{n+1}X' - a'XX'\right) &= 0 \\ E\left(X_{n+1}X'\right) - a'E\left(XX'\right) &= 0 \end{aligned}$$

En $\mathrm{E}(XX') = \Gamma$ og því er $E\left(X_{n+1}X'\right) = \left(\gamma_n, \gamma_{n-1}, ..., \gamma_1\right) = \gamma$

$$\begin{aligned} \gamma - a'\Gamma &= 0 \\ a &= \Gamma^{-1}\gamma \end{aligned}$$

Þetta vandamál er ekki þægilegt að vinna með þar sem fjöldi óþekktra stærða er $n$ og fjöldi mælinga einnig $n$.

# Kafli 3

# Sístæð tímaraðalíkön

## 3.1 Úr tímum

AR líkan af gráðu $p$ má setja fram á eftirfarandi hátt:

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.1}$$

þar sem að $\varepsilon_t$ er hvítt suð (*e. white noise*), þ.e.: $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$, $E\left(\varepsilon_t^2\right) = \sigma^2$. Tökum sem dæmi AR líkan af gráðu einn:

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.2}$$

Vongildi getum við fundið með því að skilgreina bakvirkja:

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$\begin{aligned} X_t - \phi B X_t &= \delta + \varepsilon_t \\ X_t (1 - \phi B) &= \delta + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$X_t = \frac{\delta}{1 - \phi B} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi B} \tag{3.3}$$

En við vitum samkvæmt summreglu að $1/(1 - \phi Z) = 1 + \phi Z + \phi^2 Z^2 + \cdots$ og við vitum einnig að $B\delta = \delta$. Við getum því umritað jöfnu (3.3):

$$X_t = \frac{\delta}{1 - \phi} + \sum_0^\infty \phi^j \varepsilon_{t-j}^j \tag{3.4}$$

en þessi jafna er í raun það sama og Moving Average process af óendanlegri gráðu.

Vongildi og dreifni verða því:

$$E(X_t) = \frac{\delta}{1 - \phi} \tag{3.5}$$

$$V(X_t) = \sum_0^{\mathrm{inf}} \phi^{2j} \sigma \varepsilon^2 = \frac{\sigma \varepsilon^2}{1 - \phi^2} \tag{3.6}$$

Leiðum út covariance með samskonar hætti:

$$E\left(X_t - \mu_X\right)\left(X_{t-k} - \mu_X\right) = \gamma\left(k\right) \tag{3.7}$$

Gerum ráð fyrir því að $\delta = 0$ til einföldunar.

## 3.2 Autoregressive líkön

Process er AR af gráðu $p$ ef hann er:

$$\dot{Z} = \phi \dot{Z}_{t-1} + ... + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t$$

eða

$$\phi_p\left(B\right)\dot{Z}_t = a_t$$

þar sem að $\phi_p = \left(1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p\right)$.

### 3.2.1 Fyrstu gráðu - AR(1)

Getum ritað AR(1) sem

$$\left(1 - \phi_1 B\right)\dot{Z}_t = a_t$$

eða

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + a_t$$

Þessi process er alltaf invertable. Til þess að hann sé sístæður verður rótin af $(1 - \phi_1 B) = 0$ að vera utan við einingarhringinn. Í þessu tilfelli verður $|\phi_1| < 1$.

#### Dreifni/autocorrelation

Finnum dreifni með eftirfarandi hætti:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= E\left(\dot{Z}_t\dot{Z}_t\right) = E\left(\phi^2\dot{Z}_{t-1}^2\right) + E\left(2\phi_1\dot{Z}_{t-1}a_t\right) + E\left(a_t^2\right) \\
&= \phi^2 E\left(\dot{Z}_{t-1}^2\right) + 2\phi_1 E\left(\dot{Z}_{t-1}a_t\right) + E\left(a_t^2\right) \\
&= \phi^2\gamma_0 + 2\phi_1 \cdot 0 + \sigma_a^2 \\
\gamma_0\left(1 - \phi_1^2\right) &= \sigma_a^2 \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Autocovariance má finna:

$$\begin{aligned}
E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_t\right) &= E\left(\phi_1\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-1}\right) + E\left(\dot{Z}_{t-k}a_t\right) \\
\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} \quad \text{fyrir } k \geq 1
\end{aligned}$$

Ef við stingum variance (3.8) inn í autocovariance (3.9) fáum við:

$$\gamma_k = \frac{\phi_1^k \cdot \sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

#### Sjálffylgni/hlutsjálffylgni

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} = \phi_1^k \quad \text{fyrir } k \geq 1 \tag{3.9}$$

þar sem við vitum að $\rho_0 = 1$. Sjálffylgnifallið deyr því út exponentially: (a) beint niður ef formerki $\phi_1$ er jákvætt, en í sveiflum ef að formerki $\phi_1$ er neikvætt. Ath: þessi ferill hefur óendanleg minni. Núverandi gildi processinns byggir á öllum fortíðargildum, þrátt fyrir að áhrif minnki mikið með tíma.

Hlutsjálffylgnifallið er:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

### 3.2.2 Annarrar gráðu - AR(2)

Setjum upp annarrar gráðu AR sem:

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) \dot{Z}_t = a_t$$

eða

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + a_t$$

AR(2) er alltaf viðsnúanlegur (invertable). Til þess að processinn sé stationary verða rætur $\phi(B) = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = 0$ að liggja utan einingarhringsins. Hægt er að yfirfæra stationarity skilyrði yfir á stika líkansins (WEI bls38)

$$\begin{aligned} -1 &< \phi_2 < 1 \\ -2 &< \phi_1 < 2 \end{aligned}$$

#### Dreifni/autocorrelation

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_t\right) = \phi_1 E\left(\dot{Z}_t \cdot \dot{Z}_{t-1}\right) + \phi_2 E\left(\dot{Z}_t \cdot \dot{Z}_{t-2}\right) + E\left(a_t^2\right) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2 \end{aligned}$$

Autocorrilation er:

$$\begin{aligned} E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}\right) &= \phi_1 E\left(\dot{Z}_{t-1} Z_{t-k}\right) + \phi_2 E\left(\dot{Z}_{t-2} \dot{Z}_{t-k}\right) + E\left(\dot{Z}_{t-k} \cdot a_t\right) \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad , \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Fyrir $K = 1$ þá er:

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$$

Við höfum því jöfnukerfi sem ákvarðar $\gamma_{0..2}$ út frá $\phi_{1..2}$ og $\sigma_a^2$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \end{aligned}$$

**Sjálffylgni/hlutsjálffylgni**

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad , \quad k \geq 1$$

Við sjáum að sjálffylgni er í raun mismunajafna. Með því að finna lausn mismunajöfnunnar sjáum við að:

$$\rho_k = b_1 \left[ \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \right]^k + b_2 \left[ \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \right]^k$$

Sjálffylgnifallið deyr út exponentially ef rætur $\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = 0$ eru rauntölur en verður fallandi sín bylgja ef ræturnar eru complex.

Hlutsjálffylgni AR(2) deyr snögglega út eftir töf 2.

### 3.2.3 Almenn p-undu gráðu AR process

P-undu gráðu AR má setja fram sem:

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 ... - \phi_p B^p\right) \dot{Z}_t = a_t$$

eða

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + .... + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t \tag{3.10}$$

**Dreifni/sjálffylgni**

Til þess að finna sjálffylgni margföldum við jöfnu (3.10) með $Z_{t-k}$ og tökum vongildi:

$$\begin{aligned} E\left(\dot{Z}_{t-k} Z_t\right) &= \phi_1 E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-1}\right) + \phi_2 E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-2}\right) + ... + \phi_p E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-p}\right) + E\left(\dot{Z}_{t-k} a_t\right) \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + .... + \phi_p \gamma_{k-p} \end{aligned}$$

Sjálffylgni verður því:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + ... + \phi_p \rho_{k-p}$$

Hlutsjálffylgni hverfur eftir töf $p$.

## 3.3 Moving Average líkön

Í MA framsetningunni er sagt að ef finite fjöldi $\psi$ vigta er ekki núll þá er processinn *sagur* vera moving average af gráðu $q$ og er hann settur fram sem sem:

$$\dot{Z}_t = \theta(B) a_t$$

þar sem

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - .... - \theta B^q)$$

eða:

$$\dot{Z}_g = a_t - \theta_1 a_{t-1} ... - \theta_q a_{t-q}$$

Þar sem að $1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2 < \infty$ þá er finite moving average process ávallt sístæður. MA process er viðsnúanlegur ef að rætur $\theta(B) = 0$ liggja utan við einingarhringinn.

### 3.3.1 MA(q)

Almennur MA process af gráðu $q$ er:

$$\dot{Z}_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q\right) a_t$$

Variance er:

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2$$

þar sem $\theta_0 = 1$ og aðrir autocovariancar eru:

$$\gamma_k = \begin{array}{cc} \sigma_a^2 \left(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + .... + \theta_{q-k} \theta_q\right) & k = 1, 2..q \\ 0 & k > q \end{array}$$

ACF af MA(q) cuts off eftir lag $q$. PACF tails off eftir lag q.

## 3.4 Samband milli AR og MA

### 3.4.1 AR yfir í MA

Gefum okkur sístæðan AR(p) process:

$$\phi_p(B) \dot{Z}_t = a_t$$

þar sem:

$$\phi_p(B) = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p\right)$$

Við getum umritað yfir í:

$$\dot{Z}_t = \frac{1}{\phi(B)} a_t = \psi(B) a_t$$

þar sem að

$$\psi(B) = \left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + .....\right)$$

þannig að eftirfarandi gildi:

$$\phi_p(B) \psi(B) = 1$$

Dæmi um AR(2) er á bls 45.

### 3.4.2 MA yfir í AR

Gefum okkur viðsnúanlegan MA(q) process:

$$\dot{Z}_t = \theta_q(B) a_t$$

þar sem að

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q)$$

Við getum umritað sem:

$$\pi(B) \dot{Z}_t = \frac{1}{\theta_q(B)} \dot{Z}_t = a_t$$

þar sem

$$\begin{aligned}\pi(B) &= 1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-... \\ &= \frac{1}{\theta_q(B)}\end{aligned}$$

Dæmi um MA(2) er á bls 55

### 3.4.3 Samantekt

Finite order sístæður AR(p) process samsvarar til infinite order MA proces. Finite order viðsnúanlegur MA(q) process samsvarar til infinite order AR process. Þetta tvöfalda samband gildir einnig í autocorrelation og sjálffylgniföllum.

## 3.5 ARMA(p,q)

Stationary og invertable processa má setja fram á AR eða MA formi. Þó skapast sá vandi að báðar þessar framsetningar geta innihaldið of marga stika $\Rightarrow$ minni efficiency. Því má setja processa fram sem sambland af AR og MA, þ.e.:

$$\phi_p(B)\dot{Z}_t=\theta_q(B)a_t$$

þar sem eftirfarandi skilgreiningar gilda:

$$\begin{aligned}\phi_p(B) &= \left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-...-\phi_p B^p\right) \\ \theta_q(B) &= \left(1-\theta_1 B-...-\theta_q B^q\right)\end{aligned}$$

Processinn er viðsnúanlegur ef rætur $\theta_q(B)=0$ liggja utan einingarhrings. Processinn er sístæður ef rætur $\phi_p(B)=0$ liggja utan einingarhrings. Hér er einnig gert ráð fyrir því að $\phi_p(B)=0$ og $\theta_q(B)=0$ hafi enga sameiginlega þætti.

### 3.5.1 ARMA sem AR

Hægt er að rita stationary og invertable ARMA process sem AR:

$$\pi(B)\dot{Z}_t=a_t$$

þar sem að:

$$\pi(B)=\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}=\left(1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-....\right)$$

### 3.5.2 ARMA sem MA

Getum einnig ritað ARMA sem:

$$\dot{Z}_t=\psi(B)a_t$$

þar sem að:

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2....\right)$$

### 3.5.3 ACF

Umritum ARMA líkanið yfir í:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + ... + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q}$$

og margföldum báðar hliðar með $\dot{Z}_{t-k}$ og tökum vongildi:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + ... + \phi_p \gamma_{k-p} + E\left(\dot{Z}_{t-k} a_t\right) - \theta_1 E\left(\dot{Z}_{t-k} a_{t-1}\right) - ... - \theta_q E\left(\dot{Z}_{t-k} a_{t-q}\right)$$

Við höfum $E\left(\dot{Z}_{t-k} a_{t-i}\right) = 0$ fyrir $k > i$ og því eftirfarandi:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + ... + \gamma$$

## 3.6 BOX-JENKINS aðferðafræðin

### 3.6.1 Identification

- Það að sjálffylgni deyji hægt út er vísbending um ósístæðni. Í slíkum tilfellum er nauðsynleg að taka a.m.k. 1-2 mismuni. Þegar röðin er sístæð skal haldið áfram með identification.
- Fyrir MA(q) process er sjálffylgni $\rho_k = 0$ fyrir $k > q$ og hlutsjálffylgni deyr út. Cuttoff punktur er fundinn út frá sample-sjálffylgni
- Fyrir AR(q) eru hlutsjálffylgni $\theta_{kk} = 0$ fyrir $k > p$ og sjálffylgnifallið deyr út. Cutoff punkt má finna út frá hlutsjálffylgni með því að bera mat saman við $\pm\sqrt{T}$ þar sem $1/\sqrt{T}$ er nálgun á staðalfráviki metlana $\theta_{kk}$ fyrir $k > p$.
- Ef ekki er hægt að finna cutoff punkt út frá sjálffylgni eða hlutsjálffylgni getur verið að ARMA líkan dugi ekki. Gráður AR og MA verður að meta út frá sjálffylgni og hlutsjálffylgni.

# Kafli 4

# Fourier greining

## 4.1 Út tímum Helga

Kuznets nokkur hafði áhuga á hagsveiflum, bæði langtíma og skammtímasveiflum. Hann byrjaði á því að færa þjóðarframleiðslutölur yfir í logariþma og ætlaði að ná út skammtímasveiflu með einföldu meðaltali:

$$z_t = \frac{y_{t+x} + y_{t+1} + y_t + y_{t-1} + y_{t-2}}{5} \tag{4.1}$$

og vildi ná út langtímatrendi með:

$$z_t = x_{t+5} - x_{t-5} \tag{4.2}$$

Hann ályktaði að að jafnaði væri um 20 ára sveiflu að ræða í hagkerfinu. Þessi ályktunarfræði hans var röng eins og sjá má í eftirfarandi kynningu á Fourier greiningu.

### 4.1.1 Inngangur

Hugsum okkur:

$$Y_t = \sum_{j=1}^{J} u_j \cdot \cos\lambda_j \cdot t + \sum_{j=1}^{J} c_j \cdot \sin\lambda_j \cdot t \tag{4.3}$$

þar sem að $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ..... < \lambda_J < \pi$. Gerum ráð fyrir því að $u_i$ og $v_j$ séu hendingar sem hafi eftirfarandi eiginleika:

$$\begin{aligned} E(u_i) &= E(v_j) = 0 \quad \forall i, j \\ V(u_i) &= V(v_i) = \sigma_i^2 \\ E(u_i v_j) &= E(v_i u_j) = 0 \end{aligned}$$

Finnum dreifni $Y$ :

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= \gamma(0) = \sum \sigma_i^2 \cos^2\lambda_i t + \sum \sigma_i^2 \sin\lambda_i t \\ &= \sum_1^J \sigma_i^2 \quad \text{því } \cos^2 + \sin^2 = 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

### 4.1.2 Frekari úrvinnsla

Hingað til höfum við haft $x_t$ sem verður að vera ergodic og kyrrstæð til þess að hægt sé að vinna með hana. Það að taka úrtaksmeðaltal hefur fyrst og fremst þýðingu ef að um normaldreifingu er að ræða. Úrtaksmeðaltal hefur t.d. enga þýðingu fyrir Cauchy dreifingu.

Spectrið endurspeglar dynamiska eiginleika ferilsins á svipaðan hátt og sjálffylgnifallið. Spectrið er í raun vörpun á sjálffylgni: (*fourier transform*)

$$f\left(w\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-ikw} \tag{4.5}$$

en beint samband er á milli sjálffylgnifallsins og spektursins (*inverse fourier transform):*

$$\delta_k = \int_{-\pi} \pi f\left(w\right) e^{ikw} dw$$

Sjálffylgni í tíma verður að misdreifni í tíðni. Munum að:

$$x_t = \sum \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right)$$

Þessi process er ekki háður tíma. Fyrir hverja tíðni er dregin normaldreifð tala en

$$V\left(a_i\right) = V\left(b_i\right) = \sigma_i^2 \tag{4.6}$$

Athugum það að úrtaksspektur er ekki samkvæmgt, þ.e.

$$\hat{f}\left(w\right) \nrightarrow f\left(w\right)$$

Á EFTIR AÐ VÉLRITA ÚT GLÓSUM

### 4.1.3 Smoothing

tíðnirúm = hreyfanlegt meðaltal yfir samliggjandi tíðnir í $\hat{\text{f}}$. Tímarúm = autocovarianc með háu laggi vigtaðir niður. Val á svokölluðum glugga (windows) ákvarðar stærð öryggismarka f. Úrtakssjálffylgni með háu laggi er væntanlega illa ákvörðuð og því er henni gefið minna vægi með því að vigta hana niður. Sú vigt sem notuð er á

### 4.1.4 Matlab

Til þess að reikna empirískt spectur fyrir einhverja röð:

- Búa til skrá sem inniheldur gögnin (endar á .dat)
- Fara inn í Matlab
- LOAD x.dat
- F1=FFT($x$) $\leftarrow$ reiknar Fourier transform af röðinni

$$\begin{aligned} FT\left(x\right) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t e^{-i\lambda k\cdot t} \\ \lambda_k &= 0, \end{aligned}$$

- Að reikna fouier transform er ákaflega erfitt. FFT (fast fourier transform) er algrím sem reiknar út frá nálgun.
- P=ABS(F1). ^2 ($\cdot\frac{1}{2\pi}$ og/eða $\frac{1}{n}$) $\leftarrow$ gefur úrtaksspectrið
- PLOT P
- SUM(P)
- VAR(X)
- Ef sama tala kemur á sum(P) og var(x) þá höfum við margfaldað með réttum stuðli.
- Að lokum má taka hreyfanlegt meðaltal:

$$PSM = \frac{(P(1:n-5)+P(2:n-4)+...+P(6:n))}{6}$$

## 4.2 Úr bókum

### 4.2.1 Períódísk föll

Periodic fall hefur periodu T ef að fyrir öll $t$ gildir:

$$f(t) = f(T+t)$$

Ef að slíkt fall hefur period T hefur það einnig periodur 2T, 3T,.... Einfald dæmi um periodiskt fall er sínus bylgja:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Periodan (þ.e. tími frá toppi til topps) er eftirfarandi[1]:

$$\text{Period } : T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Stuðullinn $A$ er amplitude sveiflunnar (þ.e. hvað hún er sterk), $\phi$ er phase sveiflunnar (segir til um hvar hún byrjar) og $\omega$ er hornafallatíðni periodunar, þ.e. hversu margar sveiflur processinn tekur á $2\pi$ tímaeiningum. Tíðni á tímaeiningu, þ.e. fjöldi kláraðara sveiflna á hverri tímaeiningu er þannig:

$$\text{Frequency} : f = \frac{\omega}{2\pi}$$

### 4.2.2 Summa sinus falla

Ef við höfum eina sínus sveiflu getum við umritað:

$$\begin{aligned} A\sin(\omega t + \phi) &= A(\cos\omega t \sin\phi + \sin\omega t\cos\phi) \\ &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \end{aligned}$$

[1] Þetta má sjá út frá því að: $x\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin((\omega t+\phi)+2\pi) = A\sin(\omega_t+\phi)$

þar sem að:

$$\begin{aligned} a &= A \sin \phi \\ b &= A \cos \phi \end{aligned}$$

Nú sést að $A \sin(\omega t + \phi)$ er ólínulegt í phase stikanum $\phi$ en $(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$ er línulegt í stikum $a$ og $b$ og þannig ákvarðast phase með línulegum hætti. Við getum reiknað upprunalegu stikana út úr umritaða fallinu þar sem að:

$$A = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$$

því að:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Við vitum einnig að tangent phase angle $\phi$ er hlutfallið $a/b$, og því er hægt að reikna $\phi$ um leið og við þekkjum $a$ og $b$. Það er því auljóst að ef við vitum $\omega$ en ekki $A$ og $\phi$ þá er einfaldara að meta $a$ og $b$ með LS aðferðum en að meta $A$ og $\phi$ með beinum hætti.

Rita má summu hornafalla með eftirfarandi hætti:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sin(\omega_j t + \phi_j)$$

eða

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j \sin \omega_j t + b_j \cos \omega_j t)$$

### 4.2.3 Grunnur Fourier greiningar

Tvær línur eru hornréttar ef rétt horn (90gráður) er á milli þeirra. Í Fourier greiningu eru settir fram hornréttir grunnþættir, svokallaðar overtone series sem byggja allar á einni grunntíðni. Overtone series mynda nýtt rúm þar sem ásar rúmsins eru sinusbylgjur overtone serianna. Ofanvarp þeirrar tímaraðar verið er að kanna á overtone serirnar er fengið með því að nota almenna skilgreiningu á horni, þ.e. fylgni. Ef að við erum að nálfa fall $f(t)$ getum við hugsað okkur að covariance sýni okkur hversu mikið af $\sin 2\pi f t$ sé í $f(t)$.

Gerum ráð fyrir að tímaröð hafi meðaltal núll. Gerum einnig ráð fyrir því að fjöldi mælinga sé oddatala (Ef T er slétt tala verður að leiðrétta fyrir því[**?**, Appendic 16A]). Fjöldi athuganna ákvarðar tíðnir í overtone seríum. Að gefnu T verða hornafallatíðnir $\omega_j$ eftirfarandi:

$$\omega_j = \frac{2\pi_j}{T}, \quad j = 1, 2, 3, ..., \frac{(T-1)}{2}$$

Tíðnir á tímaeiningu verða því:

$$f_j = \frac{j}{T}, \quad j = 1, 2, 3, ..., \frac{(T-1)}{2}$$

Athuga ber þó að þeta net overtone tíðna er aðeins nálgun á allt tíðnitúmið. Hægt er gera möskva netsins smærri með því að fjölga mælingum.

Til þess að finna ofanvarp $x_t$ á ásinn $\cos \omega_j t$ tökum við covariance af $x_t$ m.t.t. $\cos \omega_j t$. Þetta er það eina sem þarf vegna þess að overtone seriurnar mynda hornrétt mengi falla sem mynda grunn að rými sem er Euclidean. Næsta skref er að meta $a_j$ og $b_i$ í eftirfarandi jöfnu:

$$x_t = \sum_j \left(\hat{a}_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t\right) + e_t \tag{4.7}$$

LS metlar fyrir $a_j$ og $b_j$ eru úrtakscovariensarnir:

$$\begin{aligned}\hat{a}_j &= \frac{2}{T}\sum_{t=0}^{T-1} x_t \cos \omega_j t \\ \hat{b}_j &= \frac{2}{T}\sum_{t=0}^{T-1} x_t \sin \omega_j t\end{aligned}$$

En þetta eru grunnjöfnur Fourier greiningar.

### 4.2.4 Gottman-Perdiogram og Spectur

**Skilgreining almenna formsins**

Ef við tökum peridoc hluta jöfnu (5.7), þ.e. hægri hlið jöfnunnar að frádregnum $e_t$ og reiknum summu ferviks með því að nota metla fyrir A og B fáum við:

$$\sum_{t=0}^{T-1}\left(\hat{A}\cos 2\pi f t + \hat{B}\sin 2\pi f t\right)^2$$

En þessi stærð er í hlutfalli við *total energy of the series at the frequency f* þar sem að hún leggur saman fervik frá meðaltali núll. Ef við deilum með $4\pi$ fáum við *total engergy* fyrir ákveðna tíðni:

$$\text{Periodogram} : I(f) = \frac{1}{4\pi}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\hat{A}\cos 2\pi f t + \hat{B}\sin 2\pi f t\right)^2$$

Þetta er hin eiginlega skilgreining á periodogrami. ATH: Þegar athugunum fjölgar, eykst *energy* þar sem það er í hlutfalli við fjölda athugana. Önnur nytsöm skilgriening er *power* sem er meðal-*energy* á mælingu. Hægt er að umrita Periodogramið yfir í annað nytsamlegt form:

$$I(f) = \frac{1}{2\pi T}\left[\left(\sum_{t=0}^{T-1} x_t \cos 2\pi f t\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{T-2} x_t \sin 2\pi f t\right)^2\right]$$

Í þessar framsetningu höfum við mengi af $A$-um og $B$-um fyrir hverja tíðni $f_j$, sem metin eru með $\hat{A}_j$ og $\hat{B}_j$. Það má því auðveldlega sýna fram á að:

$$I(f_j) = \frac{T}{4\pi}\left[\frac{\left(\hat{A}_j\right)^2}{2} + \frac{\left(\hat{B}_j\right)^2}{2}\right]$$

Ef $Z_t$ er Gaussian white noise með meðaltal 0 og fastan variance þá má kanna núll-tilgátuna um að stuðlar $A_j = B_j = 0$ á ákveðinni tíðni með eftirfarandi tilgátuprófi:

$$I(f) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\chi_2^2}{2} \tag{4.8}$$

Þetta má setja fram á almennu formi: ef $x_t$ hefur fræðilegt spectralfall $p(f)$ þá hefur $I(f)$ eftirfarandi dreifingu fyrir hvert $f$:

$$I(f) \sim p(f) \frac{\chi_2^2}{2} \tag{4.9}$$

### Exponential form

Perdiogram er hægt að umrita með hjálp hornafalla [**?**, bls 207] yfir í exponential fall:

$$I(f) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} x_t e^{-i2\pi f t} \right|^2 \tag{4.10}$$

### Wiener-Khintchine theorem

Með því að nota hornafallajöfnur getum við umritað jöfnu (5.10):

$$I(f) = \frac{1}{2\pi T} \left( \sum_x x_t e^{i2\pi f t} \right) \left( \sum_x x_s e^{-i2\pi f s} \right)$$

Ef við tökum út úr summunum þá liði sem margfaldast við $e^{iM2\pi f} + e^{-iM2\pi f}$ og leggjum þá saman getum við umritað yfir Fourier transform af $\gamma_k$:

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_0 + 2 \sum_{k-1}^{T-1} \gamma_k \cos k (2\pi f) \right]$$

Í Wei[**?**, bls 232] er Fourier transformið sett fram sem Spectral fall (ekki Periodogram):

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos \omega k, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \tag{4.11}$$

Hægt er að vinna autocorrelation stuðlana út úr spectral fallinu með því að taka andhverfu Fourier transformsins:

$$\gamma_k = \int_{-\pi} \pi f(\omega) e^{i\omega k} d\omega \tag{4.12}$$

Spectral fallið $f(\omega)$ hefur eftirfarandi eiginleika:

- Það er samfellt rauntölu non-negative fall, þ.e. $|f(\omega)| = f(\omega)$
- $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$ og því er $f(w)$ periodic með periodu $2\pi$. Þar sem að $f(\omega) = f(-\omega)$ þá er fallið samhverft, en er vanalega aðeins kannað fyrir $0 \leq \omega \leq \pi$.

□ Sjá má út frá jöfnu (5.12) að:

$$Var\left(Z_t\right) = \gamma_0 = \int_{-\pi} \pi f\left(\omega\right) d\omega$$

en þetta sýnir okkur að spectrumið $f\left(\omega\right)$ má túlka sem sundurgreining á variance process. Tindur í spektral falli gefur til kynna að þáttur viðkomandi tíðni leggur fram stóran hluta af heildarvariance.

## 4.3 Úrtaksspectur - smoothing

### 4.3.1 Eiginleikar úrtaksspekturs

Ef við viljum meta spectur út frá ákveðnu úrtaki er nærtækast að skipta út fræðilegum autocovariance stuðlum $\gamma_k$ með úrtaksstuðlum $\hat{\gamma}_k$. Fyrir gefna tímaröð með $n$ athugunum getum við aðeins reiknað $\hat{\gamma}_k$ fyrir $k = 0, 1, ..., (n-1)$. Við metum $f\left(\omega\right)$ því með:

$$\hat{f}\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{\gamma}_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \cos \omega k\right)$$

Þar sem að $\hat{\gamma}_k$ er ASY óbjagaður höfum við:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{f}\left(\omega\right)\right) = f\left(\omega\right)$$

Með því að taka vongildi jöfnu (5.9) fáum við:

$$E\left(\hat{f}\left(\omega_k\right)\right) = E\left[f\left(\omega_k\right)\frac{\chi_2^2}{2}\right] = f\left(\omega_k\right)$$

og

$$Var\left(\hat{f}\left(\omega_k\right)\right) = Var\left[f\left(\omega_k\right)\frac{\chi_2^2}{2}\right] = \left[f\left(\omega_k\right)\right]^2$$

Metill fyrir spectur er ekki samkvæmur þar sem að variance $\hat{f}\left(\omega_k\right)$ stefnir ekki á núll þegar fjöldi mæ´linga stefnir á óendanlegt. Þar að auki höfum við:

$$Cov\left[\hat{f}\left(\omega_k\right), \hat{f}\left(\omega_j\right)\right] = 0$$

fyrir hverjar tvær tíðnir. Covariancinn er núll jafnvel þótt fjöldi mælinga aukist. Niðurstaðan verður sú að $\hat{f}\left(\omega\right)$ er óstöðugur og verður í göddóttur jafnvel þótt fjöldi mælinga aukist.

### 4.3.2 Smoothed Spectrum

Gottman:

Ein helsta leiðin til þess að minnka variance úrtaksspectursins er að smottha úrtaksspectur í hverri tíðni út frá gildum nálægra tíðna. Daniel stakk upp á eftirfarandi aðferð:

$$\hat{p}^{*}_{\text{Daniell}}(f_k) = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}\hat{p}(f_{j+k})$$

og kallast hún Daniell window. Vingildi nýja metilsins er óbjagað þegar mælingum fjölgar svo lengi sem spectral density function er samfelld. Dreifni hins nýja metils er:

$$\begin{aligned} var[\hat{p}^{*}(f_k)] &= \frac{1}{(2m+1)^2}\sum_{j=-m}^{m} Var[\hat{p}(f_{k+j})] \\ &\approx \frac{1}{(2m+1)^2}\hat{p}^2(f_k)(2m+1) \\ &= \frac{1}{2m+1}\hat{p}^2(f_k) \end{aligned}$$

Við sjáum að dreifni lækkar eftir því sem fjöldi mælinga eykst, þar sem fleiri og fleiri overtone seríur bætast í greininguna. Ath: Matið verður bjagað nema $p(f)$ sé nokkurnveginn flatt innan $(2m+1)$-skrefa glugga.

Fjöldi gilda sem tekin eru með í glugganum er kallað bandbreidd gluggans. En af hverju ekki að hafa gluggan mjög stóran? Eftir því sem fleiri gildi eru tekin í meðaltalið dragast stakir tindar spektursins saman í feita tinda og við getum ekki greint tinda sem eru innan bandbreiddarinar.

Allar smoothing aðferðir í frequency-domain er hægt umrita yfir í time-domain og öfugt. Umritum Daniel yfir í tíma-domain:

$$\hat{p}^{*}_{\text{Daniell}}(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{T-1} w_k\gamma_k \cos k(2\pi f)\right]$$

Time-domain vigtun með Daniel tekur minna tillit til covariansa langra tafa (cos bylgjan). Tilflutningur frá stórum vigtum yfir í litlar er mjög óregluleg og sumar vigtirnar eru neikvæðar (sjá [**?**, bls 218]).

Valdkostur við Daniell er moving average á nágranna autocovariance sem truncate niður í núll snögglega. Þessi gluggi kallast Barlett 1:

$$\hat{p}^{*}_{\text{Barlett 1}}(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{m}\gamma_k \cos k(2\pi f)\right]$$

Barlett er fínn í time-domain en skilar sveiflum (side-lobe distorsion) í frequency-domain. Nokkrir aðrir gluggar eru t.d.: Barlett2, Turkey-Hamming o.fl.

### 4.3.3 Kenningaprófun

Þegar að notað er smoothing á spectur eru einstaka metlar spektursins ekki lengur óháðir. Hvert spectral mat hefur jafngildisfrígráður (*e. equivalent degrees of freedom*). Hin rétta dreifing $\hat{p}(f)$ er mjög flókin, en hana má nálga með:

$$\hat{p}(f) \sim \frac{p(f)\left(\chi^2_{EDF}\right)}{EDF}$$

og því verða 95% öryggismörk:

$$\frac{EDF\,\hat{p}\,(f)}{\chi^2_{EDF}\,(0.025)} \leq p\,(f) \leq \frac{EDF\,\hat{p}\,(f)}{\chi^2_{EDF}\,(0.975)}$$

Marktækni spectral density eru gjarnan með lítið power nema við notum stóra bandbreidd og höfum mikinn fjölda athugana.

# Kafli 5

# Transfer function models

## 5.1 Upprifjun

Hugsum okkur:

$$\begin{aligned} x_t &= a x_{t-1} + u_t \\ y_t &= a^* y_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

Eru x og y óháðar? Þeir tengjast ekki með nokkru móti og geta því ekki verið háðir. Tökum nú úrtak frá $t = 1...n$ og reiknum fylgni með regression: $y_t = \alpha x_t + e_t$. Ef við fáum jákvæða fylgni, hvað þýðir það? Getum ekki gert upp á milli hvort að $a$ og $a^*$ eru líkar stærðir eða hvort $x_t$ er háð $y_t$. $H_0 : \rho_{xy} = 0$ er hafnað í 50% tilfella en ekki 5% tilfella eins og $\alpha$ segir til um.

Bartlett formúlan er í bókinni en formúla þessi er notuð í einfölduðum verkefnum:

$$V\left(\hat{\rho}_{xy}\right) = \left(\frac{1 + aa^*}{1 - aa^*}\right)\frac{1}{n} \quad \text{Samkv. bartlett}$$

Ná verður allri dynamík út úr röðum áður en hægt er að bera þær saman. Slíkt kallast afhvítun. Ath:Í ofangreindu dæmi var einungis tekin samtímafylgni. Það er hinsvegar ekki sjálgefið að samtímafylgni sé áhugarverðust.

Ályktanir um sjálffylgni eru erfiðar. Maður veit ekki hvað t-gildi á að vera. Bartlett formúlan getur hjálpað manni. Ókostur hennar er þó sá að maður þarf að vita form sjálffylgni áður en maður metur.

Lausn: Maður framkvæmir prewhitening á $x_t$ og $y_t$ með því að meta sitt hvort ARIMA líkanið. Þ.e. met:

$$\begin{aligned} \phi_1(B)\, x_t &= \theta(B)\, e_t \\ \phi_2(B)\, y_t &= \theta(B)\, \varepsilon_t \end{aligned}$$

Þetta gefur okkur $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$. Við getum nú reiknað metna afgangsliði:

$$\hat{e}_t = \frac{\hat{\phi}_1(B)}{\hat{\theta}_1(B)} x_t$$

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\phi}_2(B)}{\hat{\theta}_1(B)} y_t$$

Ef að vel hefur tekist til eru $\hat{e}_t$ og $\hat{\varepsilon}_t$ tiltölulega líkir hvítu suði og óháðir hvorum öðrum. Því verður dreifnin að öllum líkindum svipuð og í hvítu suði:

$$V\left(\hat{\rho}_{\hat{e}\hat{\varepsilon}}(k)\right) \simeq \frac{1}{n}$$

Dreifnin verður miklu stærri en 1/n ef einhver dynamík væri í röðunum.

Áður fyrr var oft litið á tímaraðir sem input-output raðir (Transfer function model):

$$y_t = V(B)\, x_t + \eta_t$$

þar sem að $\eta_t$ og $x_t$ er ARMA. Litið er á $y_t$ sem output og $x_t$ sem input. Þetta líkan er oft kallað ARMAX líkan (X = Exogen breytur). V eru distributed lag stuðlar eða impulse response (hugtak upprunið úr verkfræðinni). Á bls 292-3 er yfirlit yfir impulse response föll. Þessi líkön eru metin með LS eða maximum likelyhood aðferðum. Ritaðar eru ARMA jöfnur fyrir hvern lið og líkanið svo metið. (Líta á dæmi: advertising and sales) (303).

Einfalt er að spá. Spámörkin má reikna með því að rita V($B$) $x_t$ og $\eta_t$ sem MA($\infty$) . Í hagfræði er sá galli að hér er ekkert feedback, þ.e. $x_t$ er ytri breyta.

**Cross correlation:**

$\rho_{xy}(k) = Corr(x_t, y_{t+k})$

Þ.e. um ákveðna hliðrun er að ræða.

**Cross spectur**

$$f_{xy}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k)\, e^{-ikw}$$

Ef við tökum fourier transform af autocovariance fall þá detta sin liðirnir út. Ástæðan fyrir því var sú að $\gamma_{xx}(k) = \gamma_{xx}(-k)$ . Við getum því sagt:

$$\gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)\, \bar{e}^{iw} + \gamma_{xx}(-1)\, e^{iw}$$

Sinusar hverfa ekki, $\gamma_{xy}(k) \neq \gamma_{yx}(-k)$

Getum skipt crossspectri niður í rauntöluhluta og ímyndaða hluta

$$f_{xy} = CO(w) - CQ(w)$$

og eftirfarandi kallast fasi (face) sem segir til um hvor röðin er á undan:

$$\phi(w) = \arctan\left(\frac{-q(w)}{co(w)}\right)$$

Svokallað Gain er er:

$$G(w) = \frac{|f_{xy}(w)|}{f_x(w)}$$

og coherance:

$$Coh\,(k) = k_{xy}^2\,(w) = \frac{|f_{xy}\,(w)\,|^2}{f_x\,(w)\,f_y\,(w)} \quad = R^2(w)$$

# Kafli 6

# State space models

Einn að aðalkostunum: Hægt að programmera í tölvu. Túlkunarmöguleikar eru góðir. Inniheldur mælikerfi og einhvað dulið sem drífur kerfið. Maður getur fengist við univariate og multivariate líkön. Öll regression kemst fyrir í state space formi, svo og ARMA líkön. Hentugt t.d. þegar að regression hefur ARIMA afgangslið.

Höfum tímatengdan vektor af state breytum ($\mathrm{Y}_t$) sem eru með öllu óþekktar. Höfum einnig vektor mælinga ($\mathrm{z}_t$) á tíma t sem er þekktur.

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= AY_t + GX_{t+1} \\ z_t &= HY_t + b_t \end{aligned}$$

En z-eturnar eru mældar með mæliskekkju. Ef maður hefur observability $\Rightarrow$ ef mælingum er safanað mun hann geta reiknað út ferilinn aftur á bag. Controlability$\Rightarrow$ ef hægt er að stjórna X gildum, þ.e. shockum.f

## 6.1 Rannsókn hjá helga

Óstationatited: Eru sveiflur að þróast?. Settur upp breytileiki þ.e.:

$$\begin{aligned} y_t &= \theta_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_t \left(t_{t-1}\mu_{t-1}\right) + \varepsilon_t \\ & \varepsilon_t - N\left(0, \sigma_t^2\right) \end{aligned}$$

$\phi$ eru háð tíma, þ.e. byglgjan er breytuleg eftir tímanum. $\mu_t$ verður state-variable þar sem það er breytilegt yfir tíma. Staðalfrávikið er einnig breytilegt. Til eru ýmsar aðferðir til þess að leyfa staðalfráviki að breyta, sbr ARCH.

Til þess að fá líkanið til þess að gagna upp verður að setja ýmiss hliðarskilyrði. T.d. gefum okkur að $\mathrm{a}_t$ sé besta mat á $\alpha$.

$$\begin{aligned} X_{t|t-1} &= predicted \\ X_{t|t} &= filtered \\ X_{t|n} &= smoothed\ (n > t) \end{aligned}$$

Posterior dreifing er likelyhood fallið sinnum prior

Smoothathar kúrvur má ekki nota í regression því annars væri maður að reyna að spá framtíðinni með upplýsingum úr framtíðinni

Aðferðafræði:

- Gefir eitt stationary. Hvaða lönd hafa marktæka sveiflu. Hvað er sveiflan löng $\lambda$, og djúp $\rho$ $\sigma_u$.
- Þróun? Á myndum sá maður að marktækni hjá Noregi er vegna síðari hluta tímabilsins. Á Íslandi var ástæða stórs staðalfráviks í fyrri hluta tímabilsins.

# Kafli 7

# Cointergration

## 7.1 Inngangur

**Stochastic process**

Fjölskylda af hendibreytum sem raðaðar eru eftir tíma. Dæmi $\{X_t\}$ er stochastic process með stökum: $X_1,\ X_2, ..., X_t$. Ef allar hendingarnar $X_t$ hafa vongildi getum við ritað vongildi stochastic process sem $\{\mu_t\}$. Dreifni raðar er $\{\sigma_t^2\}$.Ef variansinn er sá sami fyrir hverja hendingu er varíans $\sigma^2$. Í tímaröðum er aðeins eitt stak á hverjum tíma.

**Sterk sístæðni (strict stationarity)**

Þéttifall allra hendinga er eins, þ.e.

$$F\left(X_{t1}, ....., X_{t+n}\right) = g\left(X_{t+n+1}, ...., X_{t+2n+1}\right) \tag{7.1}$$

**Veik sístæðin (weak stationarity)**

Tímaröð er sístæð ef væntanlegt gildi hverrar hendingar er það sama fyrir allar mælingar, þ.e. $E\left(X_t\right) = \mu$ og dreifni stöðug yfir tíma, þ.e. $Cov\left(X_t X_{t+j}\right) = \sigma_j$. Til þess að hægt sé að finna vongildi raðar verður hún að vera sístæð. Aðfallsgreining á ósístæðum röðum skilar vafasömum niðurstöðum.

**Ráf (random walk)**

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.2}$$

Ráf er greinilega ósístætt ferli þar sem dreifni eykst með tíma.

**Ráf með reki (random walk with a drift)**

Sama og random walk nema hvað röðin rekur í ákveðna átt.

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.3}$$

**Leitni**

Ef að leitni er í röð er hún ekki sístæð. Leitni má skipta í tvo flokka: hendileitni (dæmi: Random walk) og ákveðna leitni (Dæmi: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$. Einnig er til sambland af þessu tvennu: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + y_{t-1} + \varepsilon_t$. Leitni má fjarlægja með því að taka mismun. Dæmi um þetta er:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta y_t &= y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t \end{aligned}$$

Annað dæmi er þegar að sjálffylgni er í afgangsliðum:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \alpha \varepsilon_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

Tökum mismun:

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

en þessi röð er sístæð ef að $|\alpha| < 1$.

## 7.2 Ósístæðar raðir og heildun raða

Ósístæðar raðir og aðfallsgreining er ekki góð blanda. Þetta má sýna fram á með dæmum. Gerum ráð fyrir því að $y_t$ og $x_t$ eru óháðar breytur myndaðar með random walk. Newbold og Davies útbjuggu 1000 úrtök af tímaröðum með 50 breytum og keyrðu aðfallsgreiningar á allar raðir. Þeir komust að því að 67% aðfallsgreininganna skiluðu marktækum student-t gildum á 5% marktæknistigi. Annað dæmi um þetta er þegar að gerð var tilraun til þess að skýra einkaneyslu í Bretlandi með random walk ferli, en niðurstöðurnar urði marktækar þótt ekkert raunverulegt samband hafi ríkt milli slembiraðarinnar og einkaneyslunnar.

### 7.2.1 Heildun raða

Ósístæð röð sem umbreyta má yfir í sístæða röð með því að taka mismun $d$ sinnum er sögð vera heildanleg af gráðu d (*e integrated of order d*), þ.e. $x_t$ S $I(d)$. Það skal tekið fram að $d$ er minnsti fjöldi mismuna sem skilar sístæðri röð. Ef $x_t$ er sístæð er $d = 0$.

Línuleg samantekning (summa) sístæðra raða er sístæð: $I(0) + I(1) = I(1)$.

### 7.2.2 Árstíðarheildun raða

Ósístæð röð er kölluð árstíðarheildanleg röð af gráðu (d,D), táknað $SI_s(d, D)$ ef hægt er að umrita hana yfir í sístæða röð með því að taka árstíðarmismun D sinnum og taka síðan venjulegan mismun d sinnum. Í flestum tilfellum er ekki nauðsynlegt að taka fleiri en einn árstíðarmismun.

### 7.2.3 Próf á gráðu heildunar

Oft vitum við ekki fyrirfram hvaða heildunargráða mun skila okkur sístæðri röð. Það er því nauðsynlegt að geta prófað fyrir þessari gráðu.

#### Tillaga að lausn

Metum $y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$ með OLS.

Ef $\rho = 1$ þá er röðin ósístæð. Ef $|\rho| < 1$ er röðin sístæð. Ekki er hægt að meta $\rho$ út frá t-gildum, þar sem að t-gildi eru ekki marktæk ef röðin er ósístæð. Það er því nauðsynlegt að nota önnur próf en t-próf.

#### Dickey Fuller prófið

DF prófið kannar hvort $\rho = 1$ í jöfnuni hér að ofan. DF prófið byggir á svipaðri aðfallsgreiningu og liðurinn hér á undan, eða:

$$\Delta y_t = \delta \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

eða

$$y_t = (1 + \delta) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.4}$$

sem er sama aðfallsgreininginn og í liðnum hér á undan þar sem $\rho = (1 + \delta)$. Ef $\delta$ er negatíft verður $\rho$ minni en einn. DF prófið kannar því hvort stuðulinn $\delta$ sé negatívur. Kenningaprófunin er eftirfarandi:

$$\begin{array}{lllll} H_0: & \delta = 0 & \Leftrightarrow & \rho = 1 & \text{ósístæð} \\ H_1: & \delta < 0 & \Leftrightarrow & \rho < 1 & \text{sístæð} \end{array}$$

Nauðsynlegt er að vita dreifingu hendingarinnar sem notuð er við kenningaprófun. Þessi dreifing hefur verið reiknuð út og er í viðauka í NDEP. T-gildi aðfallsgreiningar er tekið og borið saman við DF töflu. Ef T-gildið er minna en lægra gildi töflu er $H_0$ hafnað og ef T-gildið er meira en stærra gildi töflu er $H_0$ samþykkt. Ef T-gildið er á milli lægra og stærra gildis er ekkert hægt að segja.

Ef $H_0$ er samþykkt er nauðsylegt að halda áfram, taka mismun og framkvæma DF á nýjan leik þar til að núll-kenningunni er hafnað. Ath: hætta getur verið á yfir-mismunun ef búið er að taka mismun of oft. Yfir-mismunun lýsir sér í háu pósitívu DF gildi og háu $R^2$.

Hægt er að nota DF próf þegar verið er að heilda hendiröð með drifti

#### Bætt Dickey-Fuller próf (Augmented DF)

Einn helsti galli DF prófsins er sá að það tekur ekki tillit til mögulegrar sjálffylgni á afgangsliðum. Lausn á þessu er að tefja gildi vinstra megin við jafnaðarmerkið og nota þau sem skýristærðir.

$$\Delta y_t = \delta \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i \cdot \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{7.5}$$

Erfitt getur verið að ákvarða $k$. Meginreglan er þó sú að það eigi að vera hlutfallslega lágt til að spara frígráður en þó nægjanlega stórt til þess að taka tillit til mögulegrar sjálffylgni. Hægt er að nota DW prófið til þess að nálgast k. Kenningaprófun er sú sama í ADF og DF.

**Intergration Durbin-Watson (IDW)**

IDW gefur vísbendingu um það hvort töð sé heilduð af gráðu 0 eða ekki. IDW prófið er:

$$IDW = \frac{\sum (y_t - y_{t-1})^2}{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2} \tag{7.6}$$

Ef $\rho = 1$ er nefnarinn jafn $\Sigma\varepsilon^2$, þ.e. $y_{t-1}$ samsvarar 'fitted' gildi fyrir aðfallsgreiningu $y_t$ á $y_{t-1}$ undir því skilyrði að stikinn fyrir $y_{t-1}$ sé einn.

Ef IDW er lágt (minna en 0.5) er nokkur vissa fyrir því að röðin sé ekki sístæð. Ef IDW gildið er nærri tveimur er nokkur vissa fyrir því að röðin sé sístæð.

## 7.3 Hugtakið cointergration

Það að taka mismun er ekki gallalaus lausn á ósístæðnivandanum. Þegar mismunur er tekinn tapast langtímalausn líkans. Cointergration aðferðarfræðin myndaðist út frá löngun manna til þess að meta líkön sem innihalda bæði skammtíma- og langtímalausnir og halda öllum röðum sístæðum á sama tíma.

### 7.3.1 Formleg skilgreining fyrir 2 breytur

Tímaraðir $x_t$ og $y_t$ eru sagðar cointergreraðar af gráðu $d, b$ þar sem að $d \geq b \geq 0$, þ.e. $x_t, y_t$ s $I(d, b)$ ef:

- Báðar raðir eru heildaðar af gráður $d$
- Til er línuleg samantekt breytanna tveggja sem er heildanleg af gráðu $d-b$, þ.e.:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \text{ s } I(d-b)$$

þar sem að $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ er cointergration vektor

### 7.3.2 Almenn skilgreining

Ef $\mathbf{x}_t$ er $n \times 1$ vektor af tímaröðum og

- Hver þeirra er $I(d)$
- Til er $n \times 1$ vektor $\boldsymbol{\alpha}$ þannig að $\mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\alpha}$ s $I(d-b)$

þá gildir:
$\mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\alpha}$ s $CI(d, b)$
Vandamálið verður flóknara eftir því sem röðum fjölgar.

### 7.3.3 Cointergration í praksís

Áhugaverðasta sambandið ríkir þegar $d = b$ en þá samsvara stuðlar cointergration vektorsins stuðlum langtímasambands milli breyta.

## 7.4 Próf á cointergration

### 7.4.1 Tveggja þrepa algoriþmi

- **Val á breytum**

  Hugsum okkur tvær breytur. Viljum prófa fyrir cxointergration. Báðar verða að vera af sömu gráðu

- **Cointergration vektor ákvarðaður**

  – **Cointergration vektor þekktur**
    Stundum höfum við kenningu sem segir til um hvernig cointergration vektorinn eigi að líta út. Dæmi um þetta er kenningin um fullkomna tekjuteygni einkaneyslu til langs tíma, þ.e. $cons_t^* = inc_t$, en í þessu tilfelli er cointergrating vektor $[-1, 1]$. Í þessu tilfelli er nauðsynlegt að prófa hvort línulega samantektin er sístæð. Myndum röð samantekarinnar: $u_t = cons_t - inc_t$ og prófum með DF (m=0)

  – **Cointergration vektor óþekktur**
    Höfum langtímasamband: $y_t = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_{mt} + v_t$ og cointergration vektor $[1, -\beta_1, \cdots, -\beta_m]$ sem er óþekktur. Metum langtímasambandið og könnum metil afgangsliðsins $\hat{v}_t$ með DF eða ADF

### 7.4.2 Cointergration Durbin-Watson (CIDW)

CIDW gefur vísbendingu um cointergration með því að meta hvort metin frávik frá langtímabraut eru sístæð.

$$CIDW = \frac{\sum \left(\hat{v}_t - \hat{v}_{t-1}\right)^2}{\sum \left(\hat{v}_t - \hat{v}_t\right)^2} \tag{7.7}$$

Dreifing fyrir CIDW er ekki þekkt en þó má segja að þeim mun minni sem gildi CIDW tekur því meiri líkur eru á því að hafna megi núll-kenningunni að raðirnar séu cointergreraðar. Þumalputtaregla er að ef CIDW reiknað út frá afgangsliðum jöfnu er minna en $R^2$ eru líkur á því að að hafna megi núll kenningunni.

## 7.5 Villuleiðréttingarlíkön (ECM)

### 7.5.1 Granger representation theorem

Fyrir sérhverjar cointergreraðar raðir er til villuleiðréttingarlíkan

### 7.5.2 ECM leitt út

Þessi útleiðsla er sérstaklega hentug fyrir þau tilfelli þegar að annað hvort:

- allar breytur sem koma fyrir í langtímasambandi eru I(1)
- háða breytan er I(1) og allar skýristærðir eru $CI\left(d+1, d\right)$

Til einföldunar gerum við ráð fyrir einni skýristærð, þ.e.

$$y_t = \beta x_t + u_t \tag{7.8}$$

þar sem að $y_t$ og $x_t$ eru báðar $I(1)$. Gerum ráð fyrir því að stikinn $\beta$ sé óþekktur en að OLS mat skili sístæðum afgangsliðum samkvæmt DF. Með öðrum orðum: samþykkja má cointergration $y_t$ og $x_t$ af gráðu (1,1) með cointergration vektor $\left[1, -\hat{\beta}\right]$. Næsta skref er að skipta út langtímalíkani með skammtímalíkani + ECM, þ.e.:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 \left(y_{t-1} - \beta x_{t-1}\right) + \varepsilon_t \tag{7.9}$$

Freistandi er að útvíkka ofangreinda jöfnu og meta hana svo með OLS:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 y_{t-1} - \alpha_2 \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.10}$$

en það er ekki góð lausn þar sem að:

- annar metill er fenginn fyrir $\beta$ og ekki er vitað hvort hann sé cointergration stiki eða ekki
- breyturnar eru heildaðar af mismunandi gráðum. $\Delta y_t$ og $\Delta x_t$ eru $I(0)$ en $y_{t-1}$ og $x_{t-1}$ eru $I(1)$. Ef að skilyrðið $(\alpha_2 y_t - \alpha_2 \beta x_t) \sim I(0)$ er ekki til staðar felur jafnan í sér þá forsendu að $\varepsilon_t \sim I(1)$

Engle-Granger komu með tveggja þrepa lausn á þessum vanda:

- Meta (8.8) með OLS og meta hvort afgangsliðir séu sístæðir
- Ef sístöðugleika er ekki hafnað⇒skipta út $\beta$ með metlinum $\hat{\beta}$.

Nú er skilyrðum fyrir sístæðum röðum fullnægt og allar breytur eru $I(0)$

Aðferð Engle-Granger hefur verið gagnrýnd fyrir það að OLS sé keyrt á ósístæðar raðir til þess að finna langtímasambönd. OLS er þó ekki alslæmur og skilar oft samböndum með nægjanlega góðum hætti.

# Kafli 8

# VAR

## 8.1 Úr hagrannsóknum 2

### 8.1.1 Almennt VAR líkan

Á sjötta áratugnum sætti hefðbundin líkanasmíð mikilli gagnrýni. Gagnrýni beindist einna helst að því hvernig breytur voru valdar og aðrar felldar út til þess að auðkenna jöfnukerfi. Einnig var lúkasargagnrýni beitt, en hún segir til um að stuðlar þjóðhagslíkana breytist með væntingum. Árið 1980 kom Sims fram með aðferðarfræði sem var, að hans sögn, var mun hagkvæmari leið til þess að skoða sambönd þjóðhagsstærða. VAR-líön notea ekki hagfræðikenningar líkt og hefðbundin þjóðhagslíkön, heldur eru þau eingöngu reist á tölfræði

Frávik Simms frá hefðbundinn aðferðafræði eru einkum þessi:

- Enginn munur er gerður á innri og ytri breytum
- Engar núlltakmarkanir eru settar á breytur
- Engin formleg hagfræði notuð við uppbyggingu líkana

Þessar forsendur fela það í sér að ekki reynist nauðsynlegt að kenna jöfnur, því "allt orsakar allt". Engar hagfræðikenningar þurfa að liggja að baki líkanasmíðinni, aðeins hagfræðilegar forsendur varðandi val á breytum.

Almennt ótakmarkað VAR líkan má rita:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{k} A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t \tag{8.1}$$

þar sem $Z_t$ er vektor sem inniheldur breytur líkansins á hverjum tíma og $A_i$ er fylki stikametla. Hægt er að fá óbjagaðan metil með því að keyra OLS á hverja breytu fyrir sig. Þó er að öllum líkindum hagkvæmara að keyra SUR þar sem að sammtíðarfylgni getur verið í afgangsliðnum.

Ef kanna á áhrif skella á eina stærð líkansins á framþróun allra stærða er nauðsynlegt að samtíðarfylgni sé ekki til staðar. Hægt er að útrýma henni með því að þátta fylki samvika með Choleski þáttun. Þegar þessi þáttun er framkvæmd skiptir máli hvernig breytunum er raðað. Röð breytanna er yfirleitt látin vera þannig að hún uppfylli kenningar sem lýsa því hvernig hagkerfið virkar. Dæmi um útrýmingu sjálffylgni fyrir VAR(2):

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

þar sem að $E(\varepsilon_{1t}) = E(\varepsilon_{2t}) = 0$, $E\left(\varepsilon_{1t}^2\right) = \sigma_{11}$, $E\left(\varepsilon_{2t}^2\right) = \sigma_{22}$ og $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$. Hægt er fjarlæga samtíðarfylgni úr líkaninu með því að margfalda efri jöfnuna með $\sigma_{12}/\sigma_{11}$.

### 8.1.2 Röðun á breytum - Granger Causality

Nauðsynlegt er að raða breytum upp í líkan þannig að rétt orsakasamhengi sé á milli þeirra. Þetta er gert annað hvort með því að nota hagfræðilegt insæi eða með því að prófa orsakasambönd tölfræðilega.

Granger skilgreiningin á orsakasambandi er eftirfarandi: $x$ er orsök y ef hægt er að spá fyrir, með meiri nákvæmni, um gildi núverandi $y$ með því að nota söguleg gögn x heldur en ekki.

- **Granger orsakasamband með einni töf**

  Ef $MSE(y_t|U_{t-1}) < MSE(y_t|U_{t-1}\backslash X_{t-1})$ þá $x \rightarrow y$

- **Granger orsakasamband án tafar**

Ef $MSE(y_t|U_t\backslash y_t) < MSE(y_t|U_t\backslash X_{t-1}, y_t)$ þá $x \Rightarrow y$

Sargent kom fram með aðferð til þess að meta orsakasambönd. Gerum ráð fyrir eftirfarandi líkani:

$$y_t = A_0 D_t + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t \tag{8.2}$$

þar sem $A_0 D_t$ stendur fyrir ákveðna leitni. Ef $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ þá samkvæmt skilgreiningunni orsakar x ekki y.

- Regressum $y_t$ á leitnihlutann og tafðar stærðir $y$
- Reikna út fylki afgangsliða $u_t^*$
- Regressa $u_t^*$ á allar stærðir upprunalegu jöfnunar (þ.e. bæði trend, y og x)
- Reikna $R^2$
- Prófa núll kenninguna með Lagrange multiplier

Athuga ber þó að þetta próf er ekki marktækt nema að breyturnar séu sístæðar.

### 8.1.3 Almennt spálíkan

Almennt spálíkan má setja fram þannig að:

$$Z_{T+j-i}^f = \begin{cases} Z_{T+j-i}^f & \text{fyrir } j > i \\ Z_{T+j-i} & \text{fyrir } j < i \end{cases}$$

Gert er ráð fyrir því að sammtímafylgni sé engin.

### 8.1.4 Fjöldi taflengda

Ákveðið vandamál skapast þegar fjöldi taflengda er ákveðinn. Oft byggja slíkar ákvarðanir á einkennum gagnana (s.s. 4 fyrir ársfjórðungsgögn) eða á því hvenær líkanið verður laust við sjálffylgni. Einnig er hægt að meta besta fjölda taflengda með tölfræðilegum hætti:

**Akaike**

Lágmörkum:

$$AIC = \left(-2\ln L + 2K\right)/T$$

þar sem $\ln L$ er gildi log likelyhood fallsins. Við höfum ekki þetta gildi en vitum að það er í hlutfalli við $|\varepsilon|$.

**Schwarts criteria**

Lágmörkum:

$$SC = \ln|\varepsilon| + k\ln T/T$$

## 8.2 Úr fyrirlestri Helga

Lítum á AR(1) líkönin (langbest að byrja á því einfaldasta):

$$z_t = \Phi z_{t-1} + a_t$$

Dreifnin er:

$$\begin{aligned} V\left(z_t\right) &= V\left(\Phi z_{t-1}\right) + V\left(a_t\right) \\ \Gamma\left(0\right) &= \Phi V\left(z_{t-1}\right)\Phi' + \Sigma \\ \Gamma\left(0\right) &= \Phi\Gamma\left(0\right)\Phi' + \Sigma \end{aligned}$$

Getum við leyst út fyrir $\Gamma(0)$. Gott að vita/nota eftirfarandi reglu:

$$vec\left(ABC\right) = \left(C' \nwarrow A\right) vec\left(B\right)$$

Ath asð:

$$vec\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Prófum að leysa út:

$$\begin{aligned} vec\left(\Gamma\left(0\right)\right) &= vec\left(\Phi\Gamma\left(0\right)\Phi'\right) + vec\left(\Sigma\right) \\ &= \phi \nwarrow \phi vec\left(\Gamma\left(0\right)\right) + vec\left(\Sigma\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vec\,(\Gamma\,(0)) - (\Phi \nwarrow\!\!\searrow \Phi)\, vec\,(\Gamma\,(0)) &= vec\,(\Sigma) \\ (I - \Phi \nwarrow\!\!\searrow \Phi)\, vec\,(\Gamma\,(0)) &= vec\,(\Sigma) \end{aligned}$$

$$vec\,(\Gamma\,(0)) = (I - \Phi \nwarrow\!\!\searrow \Phi)^{-1}\, vec\left(\sum\right)$$

## 8.3 Cointergration

### 8.3.1 Kynning á aðferð Johansen

Í vektor ARMA líkönum tapast mikið af einfaldleikanum sem gerði hin hefðbundnu ARMA líkön fýsileg. Höfum vektorinn:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_{2t} \\ .. \\ .. \\ Y_{pt} \end{bmatrix}$$

Hugsum okkur að hver hnit sé intergrerað af gráðu 1 I(1) þ.a. $\Delta Y_{it}$ er stationary Setjum fram á VAR formi:

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_t \mathbf{Z}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

þar sem að $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ er multivariate white noise.Hugsum okkur nú eftirfarandi:

$$Y_t - Y_{t-1} = \sum \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_{t-i} - \mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

þar sem að $Y_t - Y_{t-1}$ er I(0), $\sum \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_{t-i} - \mathbf{Y}_{t-1}$ er I(0) og $\varepsilon_t$ er I(0). Getum einnig ritað líkanið upp:

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \sum_{1}^{k-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-1} + \Pi Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

þar sem að $\sum_1^k \Gamma_i \Delta Y_{t-1}$ og $\Pi Y_{t-k}$ eru I(0). Ath: ritum:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= -(I - A_1 - .... - Ai) \\ \Pi &= -(I - A_1 - .... - A_k) \end{aligned}$$

Ath að $Y_{t-k}$ er I(1) en $\Pi Y_{t-k}$ er I(0). Hvernig er þá $\Pi$? Ath eftirfarandi:

$$\begin{aligned} V\,(X) &= \infty \\ V\,(aX) &= a^2 V\,(X) < \infty \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

þ.e.$\Pi$ fylkið er nokkurnskonar núll fylki, þ.e. hefur ekki fullaraðtölu. Síðari liðurinn í var-jöfnunni, þ.e. $\Pi Y_{t-k}$, samsvarar villuleiðréttingalið í ECM líkani.

Við viljum geta ályktað um rank $\Pi = r$. Skrifum upp $\Pi = \alpha \cdot \beta'$ þar sem að $\alpha$ er $p \times r$ og $\beta$ er $r \times p$. Stikinn $\alpha$ lýsir aðlögunarhraða að jafnvægi og $\beta$ lýsir langtímasamböndum sem ríkja á milli hnitanna í $Y$ vektornum. $r = 0$ þýðir engin langtímasambönd, $r = p$ þýðir öll hnit í jafnvægi og $r = 1$ þýðir: það er til eitt samband sem er langtímasamband..

Ath $\pi$ ekki full rank $\Rightarrow |\pi| = 0 \Rightarrow$ sum eigingildi $\pi$ eru 0. Skrifum upp $\pi = a\beta'$ þar sem að $\alpha$ og $\beta$ eru full-rank fylki. $\beta' y_{t-k}$ lýsir langtímasamböndum og $\alpha$ lýsir aðlögunarhraða að jafnvægi.

### 8.3.2 Almenn atriði í praktískri útfærslu

ATH: Sjá NDEP 198-199, sérstaklega m.t.t. eigingilda

### 8.3.3 Tengsl milli Johansen og Engle-Granger

Cointergration í VAR líkani er oftast „betra" en Engle-Granger einnar jöfnu aðferð. Tölfræðilegir eiginleikar Johansen aðferðarinnar eru almennt betri og power cointergration prófa hærra. Þó ber að leggja áherslu á það að Engle-Granger og Johansen aðferðirnar eru byggðar á mismunandi aðferðarfræði og því er ekki hægt að bera þær saman meið beinum hætti.

Í Engle-Granger er gert ráð fyrir því að breytum sé skipt í ytri og innri stærðir en í Johansen eru engar ytri breytur. Það má því nota Johansen aðferðina til þess að kanna hvort að skipting í ytri og innri stærðir sé rétt.

Ef fjöldi cointergrating vectora með aðferð Johansen er meiri en einn, þá er líklegt að skipting í ytri og innri breytur í Engle-Granger sé röng

## 8.4 Rannsókn Helga og Þórarinns

$$
\begin{aligned}
p_t &= \text{ innlend verðvísitala(log)} \\
p_t^* &= \text{erlent verðlag (log)} \\
s_t &= \text{gengi (kr per meðalmynt erlenda)} \\
r_t &= \text{vextir ríkisskuldabréfa} \\
r_t^* &= \text{vextir erlendra ríkisskuldabréfa}
\end{aligned}
$$

PPP sambandið: $p_t - p_t^* - s_t =$sístæður process

Cointergration gerir okkur kleift að brjóta skammtímadýnamík frá lagtímadýnamík.

UIP sambandið: $r_t - r_t^* = E\left(\Delta s_t | saga\right) = s\acute{}stur$ process.

Fyrsta spurning: eru breyturnar heildaðar af fyrstu gráðu? DF próf reiknað og ályktað að allar breytur séu einmitt heildaðar af fyrstu gráðu.

Líkan:

$$\delta y_t = \mu + \sum A_i y_{t-i} + \Pi y_{t-k} + \delta u_t$$

Metum fjölda langtímasambanda (rank á $\pi$) = r<p.

Ef að $\alpha$ er núll fyrir ákveðna röð þá jafngildir það að breytan sé weakly-exogen. Þetta var það sem Helgi og Þórarinn komust að varðandi aðlögun erlendra stærða að innlendum. Þeir sem ekki nota hefðbundið regression geta rambað á cointergration vektorana en þeir verða þá að hafa einhverja aðferð við að ná skammtímadýnamík út úr kerfinu.

# Kafli 9

# Exogeneity

# Kafli 10

# Transition data

## 10.1 Hazard fallið

### 10.1.1 Samfelldur tími

Hugsum okkur að tími brotthvarfs úr ákveðni stöðu sé samfelld hending $T$ og hugsum okkur að stór hópur fólks gangi inn í stöðuna á tíma sem viðskilgreinum $T = 0$. $T$ er því dvalartími í viðkomandi stöðu. Gerum ráð fyrir að hópurinn samanstandi af einsleitum einstaklingum m.t.t. kerfisbundina þátta sem hafa áhrif á dreifingu $T$.

Líkurnar á því að einstaklingur sem hefur verið í stöðunni í tíma $t$ fari úr henni í næsta tímabili af lengd $dt$ sem kemur á eftir $t$ eru:

$$P\left(t \leq T \leq t + dt\,|T \geq t\,\right)$$

Deilum með $dt$ til þess að fá meðal-líkindi á brotthvarfi á tímaeiningu fyrir stutt tímabil eftir $t$. :

$$\theta\left(t\right) = \lim_{dt \to 0} \frac{P\left(t \leq T \leq t + dt\,|T \geq t\,\right)}{dt}$$

en fall þetta er svokölluð hazard-functino. Hún lýsir samtímahraða brotthvarfs á tímaeiningu á $t$. Góð túlkun er $\theta\left(t\right) dt$ eru líkurnar á brotthvarfi út stöðu á stutta tímabilinu $dt$ eftir $t$ að því gefnu að viðkomandi sé í stöðunni á tíma $t$. Það væri einnig hægt að tala um líkurnar á því að einstaklingur hverfi úr stöðu á tímabili $dt$ á skilyrðisins $T \geq t$ en þá erum við ekki að taka um Hazard-fall.

Látum dreifingu á duration vera $P\left(T < t\right) = F\left(t\right)$ í punkti $t$ og látum líkindadreifinguna vera $f\left(t\right) = dF/dt$. Samkvæmt lögmáli um skilyrt líkindi er:

$$\begin{aligned}
p\left(\left(t \leq T < t + dt\right)|T \geq t\,\right) &= \frac{P\left(t \leq T < t + dt,\, T \geq t\right)}{P\left(T \geq t\right)} \\
&= \frac{P\left(t \leq T < t + dt\right)}{P\left(T \geq t\right)} \\
&= \frac{F\left(t + dt\right) - F\left(t\right)}{1 - F\left(t\right)}
\end{aligned}$$

Ef við deilum með $dt$ og látum $dt$ stefna á núll fáum við:

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \lim_{dt \to 0} \frac{F(t+dt) - F(t)}{dt} \cdot \frac{1}{1 - F(t)} \\
&= F'(t) \cdot \frac{1}{1 - F(t)} \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)}
\end{aligned}
$$

Ein mínus þéttifallið kemur það oft fyrir í þessum fræðum að því er gefið sérstakt nafn: survivor function og er táknað með $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \\
&\left[= \frac{d \log \bar{F}(t)}{dt}\right]
\end{aligned}
$$

Þetta er diffurjafna í $t$. Lausn hennar m.v. upphafsgildi $\bar{F}(0) = 1$ er:

$$
\bar{F}(t) = \exp\left\{- \int_0^t \theta(s)\, ds\right\}
$$

Ath: ef við vitum $\theta(t)$ fyrir öll $t$ þá vitum við $\bar{F}(t)$.

## 10.2 Remaining duration

Annað fall sem skiptir máli er vænt duration skilyrt með survival í stöðu upp að tíma $s$. Setjum þetta fram sem $e(s)$. Skyld stærð er væntur tími til brotthvarfs að survival í stöðu upp að tíma $s$ gefnu: $e(s) - s = r(s)$. Fallið $e(s)$ gefur okkur vænt heildar-duration og $r(s)$ gefur okkur vænt duration eftir fyrir einstaklinga sem ná að vera í stöðu upp á tíma $s$. Þéttifall duration $T$ skilyrt á survival upp á $s$ er:

$$
g(t \,|T \geq s) = \frac{f(t)}{\bar{F}(s)}
$$

# Kafli 11

# Verkefnavinna - punktar

Tíðnigögn, lógíst að vinna með logariþma þar sem að dreifni er háð meðaltali. Log-línuleg módel fyrir talningu. Reyndar er til timaraðaspeki fyrir raðir þar sem error liðurinn er poisson dreifður ekki normaldreifður.

ATH: reikna meðaltal og staðalfrávik fyrir allar raðir og öll transform og setja upp í töflu.

| | $\bar{X}$ | s | ... |
|---|---|---|---|
| Transform | | | |
| D=0 | | | |
| D=1 | | | |
| ... | | | |

leiðbeiningarmörg 2/SQR(N) fyrir PACC. Ef að toppur kemur á einhverjum árstíðarmun verður að:taka árstíðarmismun, setja árstíðarparameter. ATH: veljum þann mismun sem gefur minnsta s. Helgi vill ekki overdifferensa, heldur í vafamálum setja parameter til þess að ná árstíðarsveiflum.

Ef maður tekur ekki mismun verður maður að meta ARMA með fasta.

Flatarmál undir spektri er varians ferilsins.

ATH ARIMA: t gildi fyrir einstaka parametra segir manni ekki mikið (á líka við í regression).

Q: leggjum saman sjálffylgnistuðla afgangsliðarins í öðru veldi. Segir hversu vel hefur tekist að módelera dýnamík. Ef maður sér ekki áberandi strúktúr fyrir afgangsliði (correlogram) bæta við einhverjum MA liðum eða AR.

# Kafli 12

# Samantekt

Minni áhersla á cointergration nú en áður. Aðalefni námskeiðsins eru tímaraðir, þ.e. mælingar sem eru háðar og tengsl byggjar á því í hvaða röð þær eru. verðum að gers ráð fyrir að nátúra tímaraða sé stöðug: notum vinnuhugtakið weakly stationary.

Ergodic Hvaða summur til að ergodic in mean ðg varians:

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_j \to ?$$

Ef þetta er t.d. sin-byglja þar sem stokastíkin felst í því hvar hún byrjar, þá stefnir ofangreind jafna ekki á neina stærð.

Consistant: Variance og bias stefni bæði núll

## 12.1 ARMA, ACF,PACF

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + .... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} - ... - \phi_q \varepsilon_{t-q} \\ &= f\left(X_{t-1}, X_{t-2}, ...., \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}\right) \end{aligned}$$

Ef að $\varepsilon$ eru normaldreifð þá verður $X_t$ einnig normaldreift. Ef $\varepsilon$ eru ekki normalverður $X$ ekki normal. Ef að fallsamband er ekki normal en $\varepsilon$ normal verður $X$ ekki normal.

Höfum tekið fyrir AR, MA, ARMA, ARIMA; VAR;

## 12.2 tíðnirúmið (frequency domain)

Berum ekki gildi dags við fyrir gildi heldur spáir maður í hvað einstakir atburðir séu algengir,þ.e. reynir að korleggja "algengi" einhverja atriða.

Power-spectrum: Fall (eða ANOVA tafla) þar sem breytileika raðarinnar er komið fyrir bilinu núll og upp í $\pi$. Ef toppur er í $\lambda_0$ er sveifla af period: $2\pi/\lambda_0$. Ath: spectur af arch er flatt.

Spectrum heppilegt tæki. Höfum filter-function og getum séð hvað línuleg filter gera við white noise (t.d. Kuznets).

Þegar við höfum margar raðir$\Rightarrow$ cross-spectur og cross-ovariance. Höfum phase og gain. Hægt að lesa grafískt út covariance, cross spectur er erfiðara- því það er complex tala. Greinum cross spectur með coherance og phase en þetta eru föll sem leiða af crossspectrinu og gefa vísbendingar um tengsl raða. Halli í phase gefur vísbendingu um það hvor röðin er á undan, þ.e. gefið upp laggið. Coherance er eins konar $R^2$ mælikvarði. Coherence er nokkuskonar fylgnistuðull, en ekki fasti heldur function. Það hefur því lítið upp á sig að lesa phase þegar coherance er lágur.

Í hagfræðilíkönum er eðlilegt að gera ráð fyrir feedbacki. Til þess að ná feedbacki eru VAR líkön mjög þægileg. Með því að stilla parametra getur maður haft control á því hvaða form feedbackið hefur. Með því að prófa ákveðin skilyrði á parametra getur maður prófað kenningar um Causalited. VAR eru töluvert flóknari en AR og þar er VARMA sérstaklega flókið.