Glósur í Hagrannsóknum II

Sigurgeir Örn Jónsson
E-mail: sigurgj@rhi.hi.is
Sími: 564-3911

21. feb. 1996

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Efnisyfirlit

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 1

Eldri aðferðarfræði

1.1 Aðferðarfræði hagrannsókna

1.1.1 Markmið hagrannsókna

Markmið er að skýra hegðun breyta sem eru þekktar, spá fyrir um hegðun breyta eða bæði.

1.1.2 Forsendur fyrir hagrannsóknum

- Hagfræðileg teoría
- Tölfræðileg gögn
- Aðferð sem setur fram hagfræðikenningar með tölfræðilegum gögnum
- Kunnátta (know-how) sem segir okkur hvernig nota skal matstækni á tölfræðigögn og hvort rannsókn hafi gengið sem skyldi eður ei
- Viðeigandi (relevance)

1.1.3 Ákjósanlegir eiginleikar líkans

- Einfaldleiki (simplicity)
- Passar við fræðin (theoretical plausability)
- Skýringarmáttur (explanatory ability)
- Marktækni stika (accuracy of coefficients)
- Geta til að spá (forcasting ability)

1.1.4 Skilyrði fyrir því að hægt sé að draga ályktanir frá líkani

- **Hátt R^2 (Coefficient of determination)**
- Gefur til kynna að metin sambönd séu sett fram á réttan hátt, þ.e. engar áhrifamiklar skýristærðir vantar.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- **Allar framsetningar á dreifðum töfum verða að vera réttar**

  Ekki er þó nauðsynlegt að setja fram taflengdir á réttan hátt í upphafi heldur má nálgast þær með *trial-og-error* þannig að fylgni milli breytunar sem skýra á og spágildi hennar sé hámörkuð

- **Stuðlar líkansins eiga að hafa þau formerki sem vænta má út frá hagfræðilegri teoríu**

1.2 Hefðbundin aðferðarfræði

- **Núll takmarkanir á breytur þekktar fyrirfram út frá hagfræðilegum kenningum**
- **Metlar óháðir tíma og óháðir breytingum í innri og ytri stærðum**
- **Orsakasamhengi er þekkt fyrirfram út frá hagfræðikenningum**
- **Ekki er hægt að bera líkan saman beint við önnur líkön og úrskurða hvort sé betra**

1.3 Gagnaútgerð

Gagnaútgerð leiðir af því vandamáli að vera ekki í aðstöðu til þess að framkvæma stýrðar athuganir. Oft eru líkön fundið með því að vinna gögnin á kerfisbundinn hátt og finna þannig það líkan sem passar best við gögnin. Dæmi um þetta er að keyra aðhvarfsgreiningu á fjöldan allan af *candidate* jöfnum og velja þá jöfnu sem skilar hæstu R^2, hæstu t-gildum og Durbin-Watson sem næst 2. Þetta þykir almennt séð ekki vera góð aðferðarfræði

- R^2 **skilgreiningin**
- Gallinn við R^2 skilgreininguna er sá að hægt er að auka gildi þess með því að bæta við skýristærðum, jafnvel þó þær auki ekki raunverulegan skýringarmátt líkansins.
- $\overline{R}^2$ **skilgreiningin (leiðrétt** R^2)
  - Sýnt hefur verið fram á að $\overline{R}^2$ er að meðaltali hærra þegar líkan er rétt skilgreint, en ekki alltaf. þ.e. rangt líkan getur haft hærra $\overline{R}^2$ en rétt líkan.
  - Annar galli við $\overline{R}^2$ er sá að hægt er að mynda nýtt gildi fyrir sama líkan með því að umrita það.
  - Einnig skal geta þess að ekki er hægt að nota $\overline{R}^2$ eða R^2 við tölfræðilegt mat þar sem að dreifing R^2byggir á dreifni afgangsliðanna og þeim gildum sem skýristærðirnar taka í líkaninu.
- **t-gildi**

  Ef líkan er valið m.t.t. t-gilda úr mörgum candidate jöfnum getum við ekki vitað hvort hægt sé að taka mark á t-gildum lokajöfnunnar þar sem útkoma

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

aðfallsgreiningar er skilyrt m.t.t. hafnaðra aðfallsgreininga. Munurinn á venjulegu marktæknistigi og raunverulegu marktæknistigi eftir gagnaköfun kallast: Lovell bjögun. Þumalputtaregla fyrir raunverulegu marktæknistigi $\alpha^* \simeq \frac{c}{k}\alpha$ þegar k metlar eru metnir af c kandídötum.

1.4 Klassísku forsendurnar (upprifjun)

- **Rétt líkan**
  - **Línulegt í stikum**
    Ef fallsamband sem meta á er ólínulegt verða OLS stikametlar bjagaðir og hið línulega samband sem mælist gagnslaust, nema þá sem nálgun við hið rétta ólínulega samband. Í sumum tilfellum er hægt að umbreyta ólínulegum föllum yfir í linuleg, t.d. með því að taka logariþma. Ef umbreyting er ekki möguleg verður að keyra ólínulega aðhvarfsgreiningu eða maximum likelihood
  - **Engar undarskildar útskýringabreytur**
    Ef að mikilvægum skýristærðum er sleppt verður OLS stikametlar bjagaðir. Hægt er að prófa fyrir þessu með RESET, þ.e. athuga hvort proxy breyta fyrir undarskildar breytur sé marktæk.
  - **Metlarnir eru stöðugir**
    Hægt er að prófa fyrir stöðugleika metla með t.d. Chow prófi
  - **Afgangsliður er viðbætanlegur**
    Dæmi um óviðbætanlegan afgangslið: $y = L^a K \beta \cdot e$

- **Fylki skýristærða**
  - **X inniheldur engar slembistærður E(X)=X**
    Ef X inniheldur slembistærðir verður OLS metillinn hneigður. Ef um er að ræða fylgni X breyta við villulið er hægt að leiðrétta með aðferð aðstoðarbreyta
  - **Enginn marglínuleiki - dálkvektorar línulega óháðir**
    - **Fullkominn marglínuleiki**
      $\text{Rank}(X) < K \Rightarrow |X'X| = 0 \Rightarrow$ OLS metill ekki til
    - **Takmarkaður marglínuleiki**
      $|X'X|$ t 0, $var\,(b) = \sigma^2\,(X'X)^{-1} = \sigma^2 \frac{adj(X'X)}{|X'X|} =$ mjög há tala

    Þótt takmarkaður marglínuleiki sé til staðar er OLS metillinn BLUE. Helsti ókosturinn er sá að dreifni metlana verður mikil og stikametlar illa ákvarðaðir. Helstu leiðir til lausnar eru: 1) gera ekkert 2) bæta við meiri upplýsingum 3) taka trend úr röðum

- **$\mathbf{E}(\mathrm{e}) = \mathbf{0}$ og $\mathbf{E}(\mathrm{ee}') = \boldsymbol{\sigma}^2 I$**

  Dæmi um bresti á þessari forsendu eru:

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- **Sjáffylgni**

$$var\,(e) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & cov\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & cov\,(\varepsilon_1, \varepsilon_t) \\ \vdots & cov\,(\varepsilon_2, \varepsilon_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov\,(\varepsilon_t, \varepsilon_1) & & & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Ástæður fyrir sjálffylgni geta verið t.d.:

  * Efnahagsstærðir háðar yfir tíma
  * Breytum sleppt - rangt líkan
  * Rangt fallform
  * Mæliskekkjur - breytingar á mæliskekkju

Hægt er að leiðrétta fyrir sjálffylgni með því að nota GLS eða maximum likelihood: Sjá á fylgiblaði

- **Misdreifni**

$$var\,(e) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

Hægt er að leiðrétta fyrir misdreifni með því að nota GLS eða maximum likelihood.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 2

Mannauðslíkön og launamisrétti

2.1 Mannauður

Launamunur getur verið mikill milli hinna ýmsu hópa þjóðfélagsins, langskólalærðra og annara, karla og kvenna, hvítra og svarta, o.s.frv. Tilgangur þessarar greinar er að kanna launamun með hagrannsóknum

Human capital theory

- Framboðshlið: einstaklingur verður að afsala sér launum og greiða námskostnað. Einstaklingur verður því að fá nægjanlega háar launagreiðslur að námi loknu
- Eftirspurnarhlið: einstaklingur sem lokið hefur námi verður að vera framleiðnari en þeir sem engu námi hafa lokið svo hægt sé að greina honum hærri laun
- Markaðsjafnvæi: Í langtíma-samkeppnisjafnvægi er framboð og eftirspurn eftir starfsmönnum á hverju námsstigi jöfn.

Screening

Þegar einstaklingur er metinn út frá tölfræðilegum eiginleikum þess hóps sem hann tilheyrir. Þessi aðferð er hagkvæm leið fyrir atvinnurekendur að velja að meðaltali rétta starfsmenn þegar kostnaður við upplýsingaöflun er mikill.

2.1.1 Tekjulíkön

Log-normal dreifingin passar við tekjudreifingu betur en nokkur önnur dreifing. Ef r er lágt er hægt að nálga $(1+r)$ með e^r. Það er því hægt að rita líkan fyrir ávöxtun menntunar á eftirfarandi hátt:

$$\ln Y_s = \ln Y_0 + rs + u$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Þetta líkan tekur þó ekki tillit til námskostnaðar. Hægt er að bæta líkanið með því að taka tillit til starfsþjálfunar:

$$\ln Y_i = \ln Y_0 + \beta_1 s_i + \beta_2 k_i X_i + u_i$$

þar sem að β_1 er ávöxtun náms, β_2 er ávöxtun starfsnáms, k_i er hluti vinnutíma sem varið er í starfþjálfun og X_i er heildarvinnutími/reynsla. Enn er hægt að bæta líkanið með því að gera ráð fyrir því að laun vaxi minnkandi með aukinni starfsreynslu:

$$\ln Y_i = \ln Y_0 + \beta_1 s_i + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + u_i$$

Einnig er hægt að gera ráð fyrir því að starfsþjálfun sé háð námi:

$$\ln Y_i = \ln Y_0 + \beta_1 s_i + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + \beta_4 s_i X_i + u_i$$

2.2 Mismunun

Tegundir mismununar á einstaklingum í tilteknum hóp

- Þeir hafa mögulega minni tækifæri til framleiðniaukandi tækifæra s.s. náms.
- Þeir eru líklegri til þess að lenda í "lélegri" störfum
- Þeir fá lægri laun en einstaklingar í "betri hópnum" (Wage discimination)

Ástæður mismununar

- Viðskiptavinir hafa smekk fyrir mismunun á starfsfólki (þjónustustörf)
- Einn hópur tekur sig saman gegn öðrum og hækkar þannig laun sín á kostnað hins hópsins
- Einkeypisvald fyrirtækja gerir þeim kleift að greiða þeim hópi sem hefur minni tekjuteygni lægri laun (Dæmi: kvennfólk)
- Atvinnurekendur meta hæfileika einstaklinga frá tölfræilegum meðalgildum hópsins

Hægt er að meta mismunun milli hópa með hagrannsóknum. Fyrst er tekjujafna hvers hóps fyrir sig metin:

$$\text{advantaged group: } \ln y^* = X^* \beta^* + u^*$$

$$\text{dis-advantaged group: } \ln y_* = X_* \beta_* + u_*$$

Skilgrinum metlana sem b^* og b_*. Gerum ráð fyrir að $cov\,(b^* b_*) = 0$. Getum því ritað:

$$var(b^* - b_*) = var(b^*) + var(b_*)$$

Einn eiginleiki VAMK er sá að regressionlínan fer í gegnum punkta meðaltala:

$$\overline{\ln y}^* = \overline{X}^* b^* \text{ og } \overline{\ln y}_* = \overline{X}_* b_* \tag{2.1}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Mismunrinn milli stikavektora hópanna er $\Delta b \equiv b^* - b_*$ eða $b_* = b^* - \Delta b$. Við getum stungið þessu inn í jöfnu (2.1) og fáum þannig:

$$\overline{\ln y}^* - \overline{\ln y}_* = b^* \left(\bar{X}^* - \bar{X}_*\right) + \bar{X}_* \Delta b$$

en í þessari jöfnu sýnir fyrri liðurinn launaáhrif vegna mismunandi hæfileika milli hópanna og síðari liðurinn sýnir hreina mismunun.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 3

Yfirborðslega ótengd aðfallsgreining (SUR)

Þegar hagmælingarmaður stendur frammi fyrir því að meta nokkur líkön sem byggja á svipuðum aðstæðum og þar sem gögnin eru á tímaraðaformi getur verið hagkvæmt að steypa jöfnum saman. Villuliðurinn er liður sem geymir allar óvæntar breytingar og þær stærðir sem eru ekki með í framsettu líkani. Þegar um mismunandi jöfnur eru að ræða getur verið að þær upplýsingar sem liggja í villuliðnum séu sameiginlegar milli jafna (dæmi: framl.föll fyrirtækja í samskonar atvinnugrein). Það er því möguleiki á að fylgni sé á milli samtíma-villuliða í mismunandi jöfnum. Slík fylgni er kölluð samtímafylgni *(e. contemporaneous correlation)*. Þegar slík fylgni er til staðar er hagkvæmara að meta allar jöfnur samtímis en að meta hverja fyrir sig með VAMK. Þegar líkön eru metin með SUR gefum við okkur eftirfarandi forsendur varðandi villuliðina:

3.1 Forsendur

- Allir villuliðir hafa miðgildi núll
  $E\left[e_{it}\right] = 0$ fyrir $i = 1, 2, ...M$ og $t = 1, 3...., T$
- Í gefinni jöfnu er dreifni fasti yfir tíma, en hver jafna getur haft mismunandi dreifni

$$\left.\begin{array}{l} var\left(e_{1t}\right) = E\left[e_{1t}^2\right] = \sigma_1^2 = \sigma_{11} \\ var\left(e_{2t}\right) = E\left[e_{2t}^2\right] = \sigma_2^2 = \sigma_{22} \\ var\left(e_{3t}\right) = E\left[e_{3t}^2\right] = \sigma_3^2 = \sigma_{33} \end{array}\right\} t = 1, 2, ..., T$$

- Tveir villuliðir í sitt hvorri jöfnunni en á sama tímabili eru fylgnir *(samtímafylgni)*
  $\text{covar}\left(e_{it}e_{jt}\right) = E\left[e_{it}e_{jt}\right] = \sigma_{ij}\ \forall t$

– Engin fylgni er á milli villuliða á sitt hvoru tímabili hvort sem þeir eru í sömu jöfnu eða sitt hvorri jöfnunni:
  $\text{covar}\left(e_{it}e_{js}\right) = E\left[e_{it}e_{js}\right] = 0$ fyrir $t \neq s$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- Hægt er að setja ofangreindar forsendur fram með einföldum hætti: $E\left[e_i\right] = 0$ og $E\left[e_i e_j'\right] = \sigma_{ij} I$

Til þess að hægt sé að meta allar jöfnunar samtímis eru þær settar upp í "super model":

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

eða

$$y_{(MT\times 1)} = X_{(MT\times K)}\beta_{(K\times 1)} + e_{(MT\times 1)}$$

Ef líkan þetta er metið beint með OLS fæst sama niðurstaða og að meta hverja jöfnu fyrir sig með OLS. Forsendur um var/covar fylkið voru þessar: $E\left[e_{it}e_{js}\right] = \sigma_{ij}$ ef $t = s$, en 0 ef $t \neq s$. Hægt er að rita upp covariance fyllkið upp:

$$\Phi = E\left[e'e\right] = \left[\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \cdots & e_M' \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_T & \sigma_{12}I_T & \cdots & \sigma_{1M}I_T \\ \sigma_{11}I_T & \sigma_{22}I_T & \cdots & \sigma_{2M}I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}I_T & \sigma_{M2}I_T & \cdots & \sigma_{MM}I_T \end{bmatrix} = \Sigma \nwarrow I_T$$

3.2 Þekkt covariance fylki

Ef covariance fylkið er þekkt er einfalt mál að meta líkanið beint með GLS. Metillinn verður þá eftirfarandi

$$\hat{\beta} = \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1} X'\Phi^{-1}y = \left(X'\left(\Sigma^{-1} \nwarrow I_T\right)X\right)^{-1} X'\left(\Sigma^{-1} \nwarrow I_T\right)y$$

Metillinn $\hat{\beta}_i$ er betri en VAMK metillinn b_i þar sem að $\hat{\beta}_i$ tekur tillit til fylgni milli e_i og villuliða í öðrum jöfnum. $\hat{\beta}$ tekur einnig tillit til skýristærða sem eru í jöfnukerfinu en koma ekki fyrir í jöfnu i.Ath: bæði OLS og GLS eru óbjagaðir metlar, en GLS metillinn er nýtnari:

$$E\left[\hat{\beta}_{OLS}\right] = E\left[\hat{\beta}_{GLS}\right]$$

$$\text{covar}\left(\hat{\beta}_{OLS}\right) \geq \text{covar}\left(\hat{\beta}_{GLS}\right)$$

3.3 Óþekkt covariance fylki - Metill Zellner

Metill Zellners felur í sér eftirfarandi 4 skref. Hann skilar sömu niðurstöðu og maximum likelihood ef skýribreytur eru jafnmargar í öllum jöfnum og villuliðir eru multivariate-normal.

- Hver jafna fyrir sig er metin með OLS. Út úr hverri jöfnu fáum við $\hat{e}_i$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- Finnum metla fyrir variansa og covariansa:

  $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum e_{it} e_{jt}$

  Ofangreindur metill er þó bjagaður þar sem ekki hefur verið leiðrétt fyrir frígráðum. Þó er ekki einfalt að leiðrétta þar sem frígráður geta verið mismunandi milli innri jafna líkansins. Besta leiðin er oftast að leiðrétta með meðaltali frígráða:

  $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T - \frac{k_i + k_j}{2}} \sum e_{it} e_{jt}$

  Ofangreindur metill á að vera óbjagaður. Hann er ekki réttur en við getum ekki gert betur.

- Stinga metlum fyrir var/covar fylkið inn í GLS metillinn og meta.

- Taka afganga úr GLS metlinum, fara í lið 2 og halda áfram þangað til breytingar í afgöngum convergera við núll.

Í takmörkuðum úrtökum er svæði þar sem að OLS er nýtnari en SUR með Zellner. Þegar sammtíðarfylgni er lítil og mælingar fáar getur verið að tap á nýtni við að skipta Σ út með $\hat{\Sigma}$ sé meira en hagkvæmnaukningin við að nýta upplýsingar um samtímafylgni.

3.4 Kenningaprófun á samtímafylgni

Ef samtímafylgni er ekki til staðar er OLS nýtinn metill og því engin þörf að nota SUR metilinn. Það er því gagnlegt að kanna hvort samtímafylgnistuðlarnir séu 0:

$$H_0 : \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$H_1 : \text{a.m.k. einn samtímafylgnistuðull er frábrugðinn núlli}$$

Rétt próf fyrir er Lagrange prófið en það má rita á eftirfarandi hátt

$$\lambda = T \sum_{i=2}^{M} \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}^2 \sim^{asy} \chi^2_{M(M-1)/2}$$

þar sem r_{ij}^2 er fylgnistuðull í öðru veldi:

$$r_{ij}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\hat{\sigma}_{ii} \hat{\sigma}_{jj}}$$

Fyrir þriggja jöfnu kerfi lítuð prófið svona út:

$$\lambda = T \left(r_{21}^2 + r_{31}^2 + r_{32}^2 \right) \sim^{asy} \chi^2_{(3)}$$

3.5 Línuleg hliðarskilyrði á stuðla

Hugsum okkur línuleg hliðarskilyrði á forminu $R_{(J \times K)} \beta_{(K \times 1)} = r_{(J \times 1)}$. Munurinn á þessum hliðarskilyrðum og hliðarskilyrðum á eina VAMK jöfnu felst aðallega í:

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- Skilyrti metillinn byggir á Σ sem er óþekkt og verður að skipta út með $\hat{\Sigma}$. Þetta gerir það að verkum að tölfræði kenningaprófanna byggir á asymptótískum dreifingum
- Nú er hægt að prófa og setja fram hliðarskilyrði sem tengja stuðla í einni jöfnu við stuðla annarrar.

Almenni skilyrti metillinn fæst með því að lágmarka kvaðratvillu GLS metilsins

$$\min\,(y - X\beta)'\left(\Sigma^{-1} \nwarrow I\right)(y - X\beta)$$

$$m.t.t.R\beta = r$$

Metillinn verður þannig

$$\hat{\beta}^{*} = \hat{\beta} + CR'\left(RCR'\right)^{-1}\left(r - R\hat{\beta}\right)$$

$$C = \left[X'\left(\Sigma^{-1} \nwarrow I\right)X\right]^{-1}$$
$$\hat{\beta} = CX'\left(\Sigma^{-1} \nwarrow I\right)y$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 4

Kynning á samtímajöfnukerfum

4.1 Framsetning á jöfnukerfum

Hægt er að rita jöfnukerfi á eftirfarandi hátt:

$$Y_{(T\times M)}\Gamma_{(M\times M)} + X_{(T\times K)}B_{(K\times M)} + E_{(T\times M)} = 0 \qquad (4.1)$$

þar sem að M er fylki innri stærða, Γ er fylki stuðla við innri stærðir, X er fylki ytri stærða B er fylki stika við ytri stærðir og E er villuliðurinn. Villuliðurinn er fylki af dálkvektorum, þar sem hver dálkur inniheldur villuliði hverrar jöfnu. Eftirfarandi forsendur eru gefnar:

$$E\left[e_i\right] = 0fyriri = 1, 3, ...M$$

$$E\left[e_i e_j^{`}\right] = \sigma_{ij} I_T \text{ fyrir } i, j = 1, 3, ...M$$

Hægt er að umrita jöfnukerfi (4.1) á eftirfarandi hátt yfir í einfaldað form

$$Y\Gamma + XB + E = 0$$

$$Y + XB\Gamma^{-1} + E\Gamma^{-1} = 0$$

$$Y_{(T\times M)} = -X_{(T\times K)}B_{(K\times M)}\Gamma^{-1}_{(M\times M)} - E_{(T\times M)}\Gamma^{-1}_{(M\times M)}$$

eða einfaldlega sem

$$Y_{(T\times M)} = X_{(T\times K)}\Pi_{(K\times M)} + V_{(T\times M)}$$

þar sem að $\prod = -B\Gamma^{-1}$ og $V = -E\Gamma^{-1}$. Ef dálkvektorum í fylkjunum er staflað upp á hvorn annan fáum við eftirfarandi jöfnukerfi:

$$y = (I \nwarrow X)\pi + v \qquad (4.2)$$

eða

$$y_{(T\cdot M\times 1)} = (I \nwarrow X_{(T\times K)})\pi_{(K\cdot M\times 1)} + v_{(T\cdot M\times 1)}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

4.2 Asymptótískir eiginleikar

Í líkani jöfnukerfa höfum við haft þær forsendur að villur í mismunandi jöfnum eru kyrrstæðar og temporally óháðar. Af þessu leiðir eftirfarandi:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} \sim N\left(0, \Sigma \nwarrow I_T\right)$$

sama má segja um einfaldaða formið:

$$\operatorname{plim} T^{-1}V'V = \operatorname{plim} T^{-1}(\Gamma^{-1})'E'E\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1})'\Sigma\Gamma^{-1} = \text{-}$$

og því er dreifing villuliðarins:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix} \sim N\left(0, (\Gamma^{-1})'\Sigma\Gamma^{-1} \nwarrow I_T\right)$$

4.3 Bjögun við notkun VAMK á gerðarformi

Jafna breytist ekki þótt hún sé margfölduð með skalarstærð. Því má margfalda hverja jöfnu í jöfnukerfi þannig að einn stuðull fyrir ytri breytu verði -1. Setjum hornalínustakið í gamma fylkinu, þ.e. $\gamma_{ii} = -1$.

Tökum eina jöfnu út úr jöfnukerfinu (jöfnu i):

$$Y\Gamma_i + XB_i + e_i = 0$$

Þegar búið er að normalisera og endurraða dálkum þannig að þeir stuðlar sem eru frábrugðnir núlli koma fremst, en þeir stuðlar sem eru núll koma aftast lítur kerfið svona út:

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \gamma_i \\ \gamma_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \gamma_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } B_i = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \beta_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Getum þannig umritað jöfnu i á eftirfarandi hátt:

$$y_i = Y_i\gamma_i + Y_i^*\gamma_i^* + X_i\beta_i + X_i^*\beta_i^* + e_i$$

$$y_{i(T\times1)} = Y_{i(T\times(m_i-1))}\gamma_{i((m_i-1)\times1)} + X_{i(T\times k_i)}\beta_{i(k_i\times1)} + e_{i(T\times1)}$$

$$y_i = \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + e_i$$

$$y_i = Z_i\delta_i + e_i$$

Ef janfnan er metin með OLS verður metillinn eftirfarandi:

$$\widehat{\delta}_i = (Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'y_i$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

og vongildi metilsins verður eftirfarandi:

$$E\left[\widehat{\delta}\right] = E\left[(Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'\left(Z_i\delta_i + e_i\right)\right] = \delta_i + E\left[(Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'e_i\right] \tag{4.3}$$

en síðari liðurinn í jöfnu (4.3) hverfur ekki þar sem Z_i inniheldur ytri breytur sem eru m.a. ákvarðaðar af y_i og eru því ekki óháðar e_i. Metillinn er því bjagaður

$$E\left[\widehat{\delta}\right] \neq \delta_i$$

4.4 Mat á einfölduðu formi

Tökum jöfnu i út úr jöfnu (4.2):

$$y_i = X\pi_i + v_i$$

Metillinn fyrir π er því

$$\widehat{\pi}_i = (X'X)^{-1}X'y_i$$

Metillinn er samkvæmur því að:

$$\begin{aligned}\text{plim}\,\widehat{\pi}_i &= \pi_i + \text{plim}\,T\left(X'X\right)^{-1}\text{plim}\,T^{-1}X'v_i \\ &= \pi_i\end{aligned}$$

Metillinn er óbjagaður ef að X fylkið inniheldur engar slembistærðir eins og t.d. tafin gildi af sameiginlegri háðri stærð.

Í stað þess að taka eina jöfnu getum við fundið metil fyrir fylkið í heild:

$$\widehat{\pi} = \left[(I \nwarrow X)'\,(- \nwarrow I)^{-1}\,(I \nwarrow X)\right]^{-1}(I \nwarrow X)'\,(- \nwarrow I)^{-1}\,y$$

$$\widehat{\pi} = \left[I \nwarrow (X'X)^{-1}X'\right]y$$

Þessi metill er sá sami og fengist með því að meta hverja jöfnu fyrir sig með OLS. Covariance metilsins $\hat{\pi}$ er þannig:

$$E\left[(\hat{\pi} - \pi)(\hat{\pi} - \pi)'\right] = - \nwarrow (X'X)^{-1}$$

en stökin í fylkinu - má meta með $\hat{-}$:

$$\hat{\omega}_{ij} = \frac{\hat{v}_i\hat{v}_j}{T - K}$$

þar sem að:

$$\hat{v}_i = y_i - X\hat{\pi}_i$$

4.5 Vandam. þess að finna gerðarforms-stika

Við vitum að eftirfarandi tengsl ríkja milli einfaldaðs forms og gerðarforms:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} \tag{4.4}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

eða

$$\Pi\Gamma = -B$$

og

$$- \ = \left(\Gamma^{-1}\right)' \Sigma\Gamma^{-1} \tag{4.5}$$

Þar sem að hægt er að meta stika einfaldaðs forms með OLS er ákjósanlegt að geta fundið stika gerðarformsins út frá einfaldaða forminu. Aðferð þessi kallast óbein aðferð minnstu kvaðrata (e. ILS). Vandamál við þessa aðferð er að einfaldaða formið geymir ekki nægjar upplýsingar til þess að hægt sé að meta stika gerðarformsins. Í Γ eru M^2 stikar, MK í B og $M(M+1)/2$ stikar í covariance fylkinu eða samtals $M(3M+2K+1)/2$ stikar sem þarf að meta. Í jöfnu (4.4) eru hinsvegar MK tengsl og $M(M+1)/2$ tengsl í jöfnu (4.5) eða samtals $M(M+2K+1)/2$. þannig vantar M^2 upplýsingar til þess að hægt sé að auðkenna líkanið.

$M\left(3M+2K+1\right)/2 - M\left(M+2K+1\right)/2 = M^2$

Í raunverulegu dæmi liggja ávallt einhverjar forsendur að baki hagmælingu, þ.e. einhverjar upplýsingar sem hægt er að bæta inn í líkanið í formi hliðarskilyrða. Dæmi um slíkar upplýsingar eru

- Normalisering
- Núll-takmarkanir á stök í Γ og B
- Hliðarskilyrði á stika innan hverrar jöfnu
- Hliðarskilyrði á stika milli jafna
- Hliðarskilyrði á stök í Σ

4.6 Auðkenning jöfnu innan jöfnukerfis

Tökum jöfnu i úr jöfnukerfi sem samanstendur af M jöfnum:

$$Y\Gamma_i + XB_i + e_i = 0 \tag{4.6}$$

Γ_i er $(M \times 1)$ vektor og B_i er $(K \times 1)$ vektor. Hægt er að rita fyrir kerfið í heild:

$$\Pi\Gamma = -B$$

eða

$$\Pi\Gamma + B = \begin{bmatrix} \Pi & I_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

Γ_i og B_i eru i-undu vektorar af fylkunum má rita ofangreint samband fyrir jöfnu i:

$$\begin{bmatrix} \Pi & I_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ B_i \end{bmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

þar sem að fylkið $\begin{bmatrix} \Pi & I_K \end{bmatrix}$ hefur raðtölu k lýsir jafna (4.8) jöfnukerfi í $M+K$ breytum. Fjöldi óþekkra er meiri en fjöldi jafna og því vantar M upplýsingar til þess að geta leyst (auðkennt) óþekkta stika Γ_i og B_i. Hér á eftir verður farið yfir það hvernig jöfnukerfi er auðkennt. Reglurnar eru byggðar á því að nota

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

línuleg einsleit hliðarskilyrði á structural stika og normaliseringar-reglu til þess að auðkenna jöfnu. það má rita auðkennistakmarkanirnar á eftirfarandi hátt:

$$R_i \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ B_i \end{bmatrix} = R_i \Delta_i = 0 \tag{4.9}$$

þar sem að R_i er þekkt $[J \times (M+K)]$ fylki með raðtölu $J(< M+K)$. Jafna (4.8) kemur með K upplýsingar um $M+K$ stuðla jöfnu i. Jafna (4.8) verður því að koma með $M-1$ upplýsingar. Samantekt (4.8) og (4.9) felur í sér nægar upplýsingar til þess að $(M+K)$ stikar verði auðleysanlegir m.t.t. Π en þannig er jafnan auðkennd. þegar jöfnur (4.8) og (4.9) eru teknar saman má rita:

$$\begin{bmatrix} \left(\Pi \vdots I_K\right) \\ R_i \end{bmatrix} \Delta_i = 0 \tag{4.10}$$

Athuga ber þó að jafna (4.10) er ekki eina skrefið í að auðkenna jöfnuna því einnig er gert ráð fyrir því að hún hafi verið normaliseruð. Kenning línulegra jafna segir okkur að raðtala hornklofans verður að vera $(M+K-1)$ til þess að hægt sé að auðkenna jöfnuna. Oft getur reynst erfitt að kanna raðtölur í (4.10) og því er önnur leið einfaldari.

Skilgreinum:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Þá er hægt að sýna fram á að raðtala hornklofans í (4.9) er $M+K-1$ ef og aðeins ef raðtala $(R_i\Delta)$ er $M-1$

4.6.1 Order skilyrði

Nauðsynleg skilyrði fyrir því að jafna sé rétt kennd er að $Rank\,(R_i) \geq M-1$. Skilyrði þetta er þó ekki nægjanlegt. Það gildir t.d. ekki þegar að stuðlar annarrar jöfnu uppfylla hliðarskilyrði i, þ.e.: $R_i \Delta_j = 0$ fyrir $i \neq j$.

4.6.2 Rank skilyrði

Nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að $R_i \Delta_i = 0$ auðkenni jöfnu i er að $rank\,(R_i\Delta) = M-1$ þegar búið er að stinga takmörkunum inn í Δ fylkið. Ef hliðarskilyrði uppfyllir ekki Rank skilyrði er jafna ekki rétt kennd. Ef skilyrði þessu er fullnægt er jafnan annað hvort 1) rétt kennd, ef $Rank\,(R_1) = M-1$ eða 2) yfirkennd, ef $Rank\,(R_1) > M-1$.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 5

Mat á jöfnukerfum

5.1 Aðferð aðstoðarbreyta

5.1.1 Upprifjun

Ein af klassísku forsendunum er sú að fylki skýribreyta (X) sé ekki slembistærð. Þegar fylki X inniheldur slembistærðir sem eru háðar villuliðnum verður metill bjagaður. Þá getur reynst nauðsynlegt að nýta sér alferð aðstoðarbreyta (Instrumental variable). Gefum okkur sértilfelli þar sem klassíksa forsendan um engar slembistærðir sé brotin

$$Y = Z\beta + e \tag{5.1}$$

þar sem að Z fylkið inniheldur slembistærðir. Aðferð aðstoðarbreyta felst í því að finna fylki X sem hefur eftirfarandi eiginleika

- X er jafn stórt og Z
- Mikil fylgni er milli X og Z, þ.e. plim $\left(\frac{X'Z}{T}\right) = \Sigma_{xz}$
- Engin fylgni er milli X og villuliðarins, þ.e.plim $\left(\frac{Z'e}{T}\right) = 0$

Formargföldum jöfnu (5.1) með X'

$$X'Y = X'Z\beta + X'e \tag{5.2}$$

margföldum jöfnu (5.2) með T^{-1} og tökum líkindamarkgildi:

$$\operatorname{plim} T^{-1}X'Y = \operatorname{plim} X'Z\beta + \operatorname{plim} X'e$$

$$\Sigma_{XY} = \Sigma_{XZ}\beta + 0$$

en gert er ráð fyrir því að Σ_{XY} og Σ_{XZ} séu endanleg fylki. Instrumental metilinn verður þannig:

$$b_{IV} = (X'Z)^{-1} X'Y \tag{5.3}$$

$$\operatorname{plim} b_{IV} = \beta$$

Ekki er hægt að fjalla um eiginleika metilsins í takmörkuðum úrtökum. Dreifni á instrumental metlinum er fundin með central limit theorem

$$\sqrt{T}\,(b_{IV} - \beta) \rightarrow N\left(0, \sigma^2 \operatorname{plim}\left(\frac{X'Z}{T}\right)^{-1} \frac{X'X}{T} \left(\frac{Z'X}{T}\right)^{-1}\right) \tag{5.4}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

5.1.2 Val á astoðarbreytum

- **Tafin X**

  Mjög líklega correlera við X

- **Aðrar ytri stærðir**

  Dæmi í jöfnukerfi: þær stærðir sem ekki eru inni í þeirri jöfnu sem verið er að meta.

- **Annað**

  Trend, gervibreytur, sinföll, fasti o.fl

5.2 Óbein aðferð minnstu kvaðrata (ILS)

Ritum upp gerðarformið eins og áður þar sem búið er að taka eina jöfnu út úr kerfinu, normalizera og henda út stuðlum sem eru núll (þ.e. búið að auðkenna)

$$y_i = Y_i\gamma_i + X_i\beta_i + e_i = Z_i\delta_i + e_i \tag{5.5}$$

Tengsl milli gerðarformsstika og stika einfaldaða formsins eru eftirfarandi:

$$\Pi\Gamma_i = -B_i \text{ eða } \Pi \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Stikar einfaldaða formsins eru metnir með $\hat{\Pi} = (X'X)^{-1} X'Y$. Við getum því, með því að nota jöfnu (5.6) stungið metlinum inn og ritað:

$$(X'X)^{-1} X' \begin{pmatrix} y_i & Y_i & Y_i^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \hat{\gamma}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Formargföldum báðar hliðar með $(X'X)$

$$-X'y_i + X'Y_i\hat{\gamma}_i = -X'X \begin{bmatrix} \hat{\beta}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X'y_i = X'Y_i\hat{\gamma}_i + X'X\hat{\beta}_i$$

$$X'y_i = X' \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_i \\ \hat{\beta}_i \end{bmatrix}$$

$$X'y_i = X'Z_i\delta_i \tag{5.8}$$

þar sem að X' er $(K \times T)$ fylki, $Z_i = \begin{bmatrix} Y_i & X_i \end{bmatrix}$ er $[T \times (m_i - 1 + k_i)]$ fylki og $\hat{\delta}$ er $[(m_i - 1 + k_i) \times 1]$ fylki. Fylkið $X'Z_i$ er því: $(K \times (m_i - 1 + k_i))$. Ef $X'Z_i$ er ferningsfylki má finna ILS metillinn:

$$\hat{\delta}_{i(ILS)} = (X'Z_i)^{-1} X'y_i$$

ILS virkar aðeins ef $X'Z$ er ferningsfylki með fulla raðtölu. Ef jafna i er undirkennd, $K > m_i - 1 + k_i$ þá er $X'Z$ ekki ferningsfylki. Sama gildi ef jafna i er yfirkennd.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

5.3 Almenn aðferð minnstu kvaðrata

5.3.1 GLS metillinn

Lírum aftur á jöfnu (5.5) og jöfnuna umbreytta (margfaldaða með X')

$$y_i = Y_i\gamma_i + X_i\beta_i + e_i = Z_i\delta_i + e_i \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} X'y_i &= X'Y_i\gamma_i + X'X_i\beta_i + X'e_i \\ &= X'Z_i\delta_i + X'e_i \end{aligned} \tag{5.10}$$

Umbreytingin þýðir það að jafnan er með nýjum skýristærðum sem hafa nonstochastic eiginleika þegar fjöldi athugana er mikill. Vongildi villuliðarins $E\left(X'e_i\right)$ er núll vektor jafnvel þótt X innihaldi tafðar innri stærðir. G.r.f. að e_i sé i.i.d. normal. Leiðum út covariance fylkið:

$$var\left(X'e_i\right) = E\left(X'e_ie_i'X\right) = \delta_{ii}E\left[X'X\right] \tag{5.11}$$

Við getum gert ráð fyrir því að $\operatorname{plim} T^{-1}X'X = X'X$ og getum því ritað GLS metilinn

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_i &= \left[\left(X'Z_i\right)'\left(\sigma_{ii}X'X\right)^{-1}\left(X'Z_i\right)\right]^{-1}\left(X'Z_i\right)'\left(\sigma_{ii}X'X\right)^{-1}X'y_i \quad (5.12) \\ &= \left[Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Z_i\right]^{-1}Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'y_i \quad (5.13) \end{aligned}$$

Úrtakseiginleikar

Forsendur

Gerum ráð fyrir að jafna i sé auðkennd, að X innihaldi einungis ytri breytur o að

$$\operatorname*{plim}_{t\to\infty}\frac{X'X}{T} = \Sigma_{XX} \tag{5.14}$$

þar sem að Σ_{XX} er nonsingular

$$E\left[e_ie_j'\right] = \sigma_{ij}I \tag{5.15}$$

$$E\left[X'e_i\right] = 0 \tag{5.16}$$

Samkvæmni

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_i &= \left[Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Z_i\right]^{-1}Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'y_i \\ &= \delta_i + \left[Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Z_i\right]^{-1}Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'e_i \end{aligned} \tag{5.17}$$

Tökum líkindamarkgildi

$$\begin{aligned} \operatorname{plim}\widetilde{\delta}_i &= \delta_i + \left[\left(\operatorname{plim} T^{-1}Z_i'X\right)\left(\operatorname{plim} T\left(X'X\right)^{-1}\right)\operatorname{plim} T^{-1}X'Z_i\right]^{-1} \\ &\quad \cdot\left(\operatorname{plim} T^{-1}Z_i'X\right)\left(\operatorname{plim} T\left(X'X\right)^{-1}\right)\left(\operatorname{plim} T^{-1}X'e_i\right) \end{aligned} \tag{5.18}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

En $\operatorname{plim} T^{-1}X'e_i = 0$ og því gildir

$$\operatorname{plim} \widetilde{\delta}_i = \delta_i \tag{5.19}$$

Covariance fylki

$$\hat{\Sigma}_{\delta_i} = \hat{\sigma}\left(Z_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Z_i\right)^{-1} \tag{5.20}$$

5.4 Tveggja þrepa metill

5.4.1 Útleiðsla

Víkkum út Z fylki í jöfnu (5.13), en $Z_i = \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_i &= \left[\begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}' X\left(X'X\right)^{-1}X'\begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}' X\left(X'X\right)^{-1}X'y_i \\
&= \begin{bmatrix} Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i & Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'X_i \\ X_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i & X_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'X_i \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'y_i \\ X_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'y_i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Einfaldaða formið má rita

$$\begin{aligned}
Y &= X\Pi + V \\
\begin{bmatrix} y_i & Y_i & Y_i^* \end{bmatrix} &= X\begin{bmatrix} \pi_i & \Pi_i & \Pi_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i & V_i & V_i^* \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Hægt er að meta Π með OLS en metillinn er: $\hat{\Pi}_i = \left(X'X\right)^{-1}X'Y_i$. Við vitum þannig að:

$$X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i = X\hat{\Pi} = \hat{Y}_i = Y_i - \hat{V}_i \tag{5.23}$$

þar sem að $\hat{Y}_i$ er $[T \times (m_i - 1)]$ fylki af metnum gildum Y_i. Útfærum $\widetilde{\delta}_i$ metilinn (5.21) nánar:

5.4.2 Fyrra fylki

Stak 1,1

$$= Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i \tag{5.24}$$

Stingum inn $\left(X'X\right)^{-1}\left(X'X\right)$ inn fyrir aftan $Y_i'X$:

$$= Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i \tag{5.25}$$

Vitum að $Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X' = \hat{Y}_i'$ og því getum við einfaldað:

$$\begin{aligned}
&= \hat{Y}_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i \\
&= \hat{Y}_i'\hat{Y}_i
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Stak 1,2

$$\begin{aligned}
&= Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'X_i \\
&= \hat{Y}_i'X_i
\end{aligned} \tag{5.27}$$

þar sem að $\hat{Y}_i = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_i$ og þannig $\hat{Y}_i' = Y_i'X\left(X'X\right)^{-1}X'$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Stak 2,1

$$\begin{aligned} &= X_i' X \left(X'X\right)^{-1} X' Y_i \\ &= X_i' \hat{Y}_i \end{aligned} \tag{5.28}$$

þar sem að $\hat{Y}_i = X \left(X'X\right)^{-1} X' Y_i$

Stak 2,2

$$= X_i' X \left(X'X\right)^{-1} X' X_i \tag{5.29}$$

Stingum inn $\left(X'\right)^{-1} X'$ á eftir X_i'

$$\begin{aligned} &= X_i' \left(X'\right)^{-1} X' X \left(X'X\right)^{-1} X' X_i \\ &= X_i' X_i \end{aligned} \tag{5.30}$$

5.4.3 Síðari liður

Stak 1,1

$$\begin{aligned} &= Y_i' X \left(X'X\right)^{-1} X' y_i \qquad (5.31) \\ &= \hat{Y}_i' y_i \end{aligned}$$

Stak 2,1

$$\begin{aligned} &= X_i' X \left(X'X\right)^{-1} X' y_i \\ &= X_i' X X^{-1} \left(X'\right)^{-1} X' y_i \\ &= X_i' y_i \end{aligned} \tag{5.32}$$

5.4.4 Mat á líkani

Metilinn $\widetilde{\delta}_i$ umritast á eftirfarandi hátt:

$$\widetilde{\delta}_i = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i' \hat{Y}_i & \hat{Y}_i X_i \\ X_i' \hat{Y}_i & X_i' X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}_i' y_i \\ X_i' y_i \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

Ef við skilgreinum $\widehat{Z}_i = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & X_i \end{bmatrix}$ getum við umritað metilinn (5.33):

$$\widetilde{\delta}_i = \left[\widehat{Z}_i' \widehat{Z}_i\right]^{-1} \widehat{Z}_i' y_i \tag{5.34}$$

Hægt er að fá þennan metil með því að meta eftirfarandi með OLS:

$$y_i = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & X_i \end{bmatrix} \delta_i + \bar{e}_i \tag{5.35}$$

Tveggja þrepa metilinum má skipta niður í tvö matsstig

- Meta stika einfaldaðs forms Π_i með $\hat{\Pi}_i = \left(X'X\right)^{-1} X' Y_i$ og notað matið til þess að spá fyrir um metin $\hat{Y}_i$, þ.e. $\hat{Y}_i = X \left(X'X\right)^{-1} X' Y_i = X \hat{\Pi}_i$

- Stinga $\hat{Y}_i$ inn í jöfnu (5.35) og meta $\widehat{\delta}_i$.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

5.5 Þriggja þrepa metill

5.5.1 Uppsetning líkans

Tveggja þrepa metillinn er samkvæmur en ekki asemtótískt nýtinn. Í 2LSL er hver jafna metin fyrir sig. Þó tveggja þrepa metillinn noti upplýsingar úr öllum ytri og fyrirframákveðnum breytum tekur hann ekki tillit til Y_i^* (þeirra ytri stærða sem koma fram í kerfinu en ekki jöfnu i). Hann tekur heldur ekki tillit til samtíðarfylgni milli villuliða, þ.e. $E\left[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j'\right] = \sigma_{ij} I$ fyrir $i \neq j$. Lausn á þessu vandamáli er að setja líkanið upp sem SUR líkan. Setjum upp jöfnukerfið á eftirfarandi hátt:

$$\begin{bmatrix} X'\mathbf{y}_1 \\ X'\mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ X'\mathbf{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Z_1 & & & \\ & X'Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X'Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X'\mathbf{e}_1 \\ X'\mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ X'\mathbf{e}_M \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

eða með hjálp Kronecker products:

$$(I \otimes X')\,\mathbf{y} = (I \otimes X')\,Z\boldsymbol{\delta} + (I \otimes X')\,\mathbf{e} \tag{5.37}$$

þar sem að

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_M \end{bmatrix}_{\left(TM \times \sum_{i=1}^{M}(m_i - 1 + k_i)\right)}$$

Einnig er rétt að taka fram að: $\mathbf{y}$ er $(TM \times 1)$ fylki, $\boldsymbol{\delta}$ er $\left(\sum_{i=1}^{M}(m_i - 1 + k_i) \times 1\right)$ vektor og $\mathbf{e}$ er $(TM \times 1)$ vektor

5.5.2 Covariance fylki

Þar sem að X er fylki ytri stærða sem eru óháðar $\mathbf{e}$ má rita covariance fylki $(I \otimes X')\,e$ sem:

$$\begin{aligned} E\left[(I \otimes X')\,\mathbf{e}\mathbf{e}'\,(I \otimes X)\right] &= E\left[(I \otimes X')\,E\left[\mathbf{e}\mathbf{e}' \mid X\right](I \otimes X)\right] \\ &= E\left[(I \otimes X')\left(\Sigma_{(M\times M)} \otimes I\right)(I \otimes X)\right] \\ &= E\left[(\Sigma \otimes X')\,(I \otimes X)\right] \\ &= \Sigma_{(M\times M)} \otimes E\left[X'X\right] \end{aligned} \tag{5.38}$$

Ef við gerum ráð fyrir því að $(X'X/T)$ convergerar á óslembið markgildi reynist $T^{-1}X'X$ vera samkvæmur metill fyrir $T^{-1}E\left[X'X\right]$ og því getum við skipt (5.38) út með $\Sigma \otimes X'X$.

5.5.3 Metill

Þar sem að covariance fylkið er þekkt (asymptótískt) getum við ritað upp GLS metil fyrir jöfnukerfið:

$$\delta^* = \left\{Z'\,(I \otimes X')'\left(\Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right)(I \otimes X')\,Z\right\}^{-1}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

$$
\begin{aligned}
&\times Z'\left(I \otimes X'\right)'\left[\Sigma^{-1} \otimes \left(X'X\right)^{-1}\right]\left(I \otimes X'\right) y \\
= &\left\{Z'\left(\Sigma^{-1} \otimes X\left(X'X\right)^{-1} X'\right) Z\right\}^{-1} Z'\left[\Sigma^{-1} \otimes X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] y
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

5.5.4 Matsaðferð

Metillinn er háður gildum covariance fylkisins Σ. Til þess að leiða út nothæfa útgáfu af δ^* verðum við að finna samkvæman metill $\hat{\Sigma}$ með því að meta stök $\hat{\sigma}_{ij}$ á eftirfarandi hátt:

$$
\hat{\delta}_{ij} = \frac{\left(y_i - Z_i\widetilde{\delta}_i\right)'\left(y_j - Z_j\widetilde{\delta}_j\right)}{\tau} \tag{5.40}
$$

þar sem að $\widetilde{\delta}$ er GLS metillinn úr jöfnu (5.34) og τ er reiknað sem:

$$
\tau_1 = T
$$

eða

$$
\tau_2 = \frac{(MT - p)}{M}
$$

þar sem að p er fjöldi metinna stika í líkaninu:

$$
p = \sum_{i=1}^{M}\left[(m_i - 1) + k_i\right]
$$

m_i og k_i er fjöldi sameiginlega óháðra og fyrirframákveðna breyta í jöfnu i. Ef það eru J milli-jöfnu hliðarskilyrði er rétta skilgreiningin á τ:

$$
\tau_3 = \frac{[MT - (p - J)]}{M}
$$

Nothæfi metillinn er því

$$
\delta^* = \left\{Z'\left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X\left(X'X\right)^{-1} X'\right) Z\right\}^{-1} Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] y \tag{5.41}
$$

Hægt er að skipta mati með 3SLS í eftirfarandi skref:

- Finna M metla $\widetilde{\delta}_i, i = 1, 2, ..., M$ með 2SLS til þess að meta stök í $\hat{\Sigma}$ fylkinu
- Nota $\hat{\Sigma}$ fylkið til þess að meta þriggja þrepa metil

5.5.5 Maximum likelihood

Full information maximum likelihood

Hingað til hefur ekki verið tekið tillit til upplýsinga þeirrar forsendu að villuliðir eru multivariate-normal. Ritum upp jöfnukerfið á gerðarformi:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M \end{bmatrix} \tag{5.42}
$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e} \tag{5.43}$$

Skilgreinum nú $\mathbf{e}$ sem normal vektor með miðgildi núll og dreifni $\Sigma \nwarrow I_T$. Þá er þéttifall $\mathbf{e}$:

$$g(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-MT/2} \left|\boldsymbol{\Sigma} \nwarrow I_T\right|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{e}' \left(\boldsymbol{\Sigma} \nwarrow I_T\right)^{-1} \mathbf{e}\right] \tag{5.44}$$

Til þess að yfirfæra þéttifall $\mathbf{e}$ yfir á þéttifall fyri $\mathbf{y}$ er nauðsynlegt að nota Jacobian umritun, þar sem hvert y er fall af mörgum afgangsliðum:

$$f(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-MT/2} \left|\boldsymbol{\Sigma} \nwarrow I_T\right|^{-1/2} |\Gamma|^T \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta})' \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \nwarrow I_T\right)(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta})\right] \tag{5.45}$$

það að hámarka þéttifallið m.t.t. $\boldsymbol{\delta}$ og $\boldsymbol{\Sigma}$ er það sama og að hámarka log-likelyhood fallið:

$$\ln l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma}|\,\mathbf{y}, \mathbf{Z}) = -\frac{MT}{2}\ln(2\pi) + \frac{T}{2}\ln|\Sigma|^{-1} + T\ln|\Gamma| - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta})' \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \nwarrow I_T\right)(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}) \tag{5.46}$$

þar sem að $\left|\boldsymbol{\Sigma} \nwarrow I_T\right|^{-1/2} = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-T/2} = \left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right|^{T/2}$ hefur verið beitt. Mat á FIML byggir á því að hámarka log-likelyhood fallið m.t.t. takmarkana á Γ,B og Σ. Ef engin skilyrði eru sett á Σ hefur FIML metill δ asymtótískt sömu dreifingu og þriggja þrepa metilinn $\hat{\delta}^*$.

Takmarkaður maximum likelihood metill

Log-likelihood fallið þarf að hámarka með ólínulegum aðferðum en þær geta orðið býsna flóknar þegar kerfið er orðið stórt. Ein lausn á þessu vandamáli er að meta maximum likelihood á hverja jöfnu fyrir sig. Tökum sem dæmi jöfnu i:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\delta}_t + \mathbf{e}_i \tag{5.47}$$

þar sem að $Z_i = \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}$. Getum ritað dreififallið fyrir $\mathbf{y}_i$ og Y_i, innri breytur í jöfnu i:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_i, Y_i) &= (2\pi)^{-m_iT/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}_* \nwarrow I_T\right|^{-1/2} |\Gamma_*|^T \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_* - \mathbf{Z}_*\boldsymbol{\delta}_*)' \left(\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \nwarrow I_T\right)(\mathbf{y}_* - \mathbf{Z}_*\boldsymbol{\delta}_*)\right] \end{aligned} \tag{5.48}$$

þar sem að $\boldsymbol{\Sigma}_*$ er $(m_i \times m_i)$ subfylki af $\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{y}_*$ er undirvektor $\mathbf{y}$ sem inniheldur $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2..., \mathbf{y}_{m_i}$, Z_* er undirfylki $\mathbf{Z}$ sem inniheldur $Z_1, Z_2, ..., Z_{m_i}$ og $\boldsymbol{\delta}_*$ er undirvektor $\boldsymbol{\delta}$ sem inniheldur $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, ..., \boldsymbol{\delta}_{m_i}$. Log-liklihood fallið er eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \ln l(\boldsymbol{\delta}_*, \boldsymbol{\Sigma}_*|\mathbf{y}_*, X) &= -\frac{Tm_i}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_*| + T\ln|\Gamma_*| \\ &\quad -1/2(\mathbf{y}_* - \mathbf{Z}_*\boldsymbol{\delta}_*)' \left(\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \nwarrow I_T\right)(\mathbf{y}_* - \mathbf{Z}_*\boldsymbol{\delta}_*) \end{aligned} \tag{5.49}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 6

Uppruni nútíma aðferðarfræði

6.1 Inngangur

Kafli þessi byggir á rannsókn Davidson, Hendry, Srba og Yeo (1978) (nefnd DHSY) á heildarneyslu í Bretlandi. Rannsókn þessi hafði sterk áhrif á þá tækni sem hagmælingarmenn nota nú í dag til þess að módelera tímaraðagögn.

6.2 Hagfræðilegur bakgrunnur

Tvær helstu neyslukenningar eru neyslukenning Keynes (*e. Absolute Income Hypothesis*) og ævitekjukenning Friedmans (*Permanent Income Hypothesis*).

Neyslukenning Keynes

Kjarni kenningar Keynes var sá að einstaklingar eyddu meira í neyslu þegar tekjur þeirra hækkuðu, en ekki eins mikið og tekjuhækkunin sjálf, þ.e. að jaðarneysluhneigð væri minni en einn. Keynes sagði einnig að hluti sparanaðar af tekjum myndi aukast þegar tekjur jykust, þ.e. að meðalneysluhneigð væri fallandi.

Mikil áhersla hefur verið lögð á muninn á milli skammtíma- og langtímahegðun heildarneyslu. Skammtímaneysluhneigð ætti samkvæmt öllu að vera minni en langtímaneysluhneigð. Einfaldasta líkanið sem nær yfir einhvað af þessum atriðum er:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t \tag{6.1}$$

Hér er gert ráð fyrir því að fastinn α sé jákvæður og $0 < \beta < 1$, þar sem að β er jaðarneysluhneigð. Út frá líkani þessu má leiða út meðalneysluhneigð:

$$APC = \frac{C_t}{Y_t} = \frac{\alpha}{Y_t} + \beta \tag{6.2}$$

Þegar til lengri tíma er litið mun $APC = MPC$, en til skamms tíma er $MPC < APC$.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Ævitekjukenningin

Ævitekjukenningin snýst um það að einstaklingar taka neysluákvarðanir út frá væntum ævitekjum en ekki mældum rauntekjum á hverjum tíma. Tvær megin forsendur ÆTK eru:

- Ævineysla C^P (*permanent consumption*) er í föstu hlutfalli við ævitekjur Y^P, þ.e. $C_t^P = a_1 Y_t^P$.
- Engin fylgni er milli sveiflna í tekjum og neyslu, þ.e. óvæntar aukatekjur fara í endingargóðar neysluvörur (eignir) en ekki eiginlega neyslu.

Nokkur vandamál koma upp við að meta ÆTK. Þörf er á því að mæla fastar tekjur og fasta neyslu. Hægt er að skipta út C_t^P með C_t þar sem að munur á þessum stærðum er slembistærð með miðgildi núll og bætist því við villulið jöfnunnar. Því má rita neyslujöfnuna sem:

$$C_t = \alpha_1 Y_t^P + \varepsilon_t \tag{6.3}$$

Ævitekjur má nálgast með aðlögunarvæntingum þannig að ævitekjur breytast milli tímabila í réttu hlutfalli við rauntekjur hvers tímabils og ævitekna tímabilsins á undan, þ.e.:

$$Y_t^P - Y_{t-1}^P = (1-\lambda)\left(Y_t - Y_{y-1}^P\right) \tag{6.4}$$

þar sem að $0 < \lambda < 1$. Við getum einnig ritað:

$$Y_t^P = Y_{t-1}^P + (1-\lambda)\left(Y_t - Y_{y-1}^P\right) \tag{6.5}$$

Stingum jöfnu (6.5) inn í jöfnu (6.3):

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha_1\left[Y_{t-1}^P + (1-\lambda)Y_t - (1-\lambda)Y_{t-1}^P\right] + \varepsilon_t \\ &= \alpha_1\lambda Y_{t-1}^P + \alpha_1(1-\lambda)Y_t + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{6.6}$$

Tefjum jöfnu (6.3) um eitt tímabil og margföldum með λ:

$$\lambda C_{t-1} = \lambda\alpha_1 Y_{t-1}^P + \varepsilon_{t-1} \tag{6.7}$$

og drögum hana frá jöfnu (6.6):

$$C_t - \lambda C_{t-1} = \alpha_1(1-\lambda)Y_t + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}) \tag{6.8}$$

en þessa jöfnu má endurskrifa sem:

$$C_t = \beta_1 C_{t-1} + \beta_2 Y_t + v_t \tag{6.9}$$

þar sem að $\beta_1 = \lambda$, $\beta_2 = \alpha_1(1-\lambda)$, og $v_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$. Stuðullinn β_2 er skammtímajaðarneysluhneigð. Leysa má langtímastuðla úr líkaninu með því að gera ráð fyrir því að $C^* = C_t = C_{t-1}$, þannig að:

$$C^* = \frac{\beta_2}{1-\beta_1}Y_t + \frac{1}{1-\beta_1}v_t \tag{6.10}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

6.3 Líkanagerð

6.3.1 Inngangur

Í kennslubókinni eru neyslulíkön metin út frá ofangreindum kenningum. Líkönin voru metin með ársfjórðungsgögnum frá Bretlandi (1957-1975). Mikilvægt próf á líkani er hversu spágeta þess er mikil og því eru síðustu 20 athuganirnar ekki teknar með í aðfallsgreiningum nema þegar um próf á spágildum er að ræða. Aðfallsgreining skilar upplýsingum um eiginleika líkans og ber þar helst að nefna

- RSS (Residual sum of squares)
- Staðalfrávik villuliðarins

$$\sigma = \sqrt{\frac{RSS}{T-k}}$$

- Staðalfrávik stika
- H.C.S.E Heteroscedastic Consistent standard errors

  Samkvæmir metlar á staðalfráviki stika ef g.r.f. að misdreifni eigi sér stað. Ef H.C.S.E gildin eru mjög frábruðin upprunalegu metlunum fyrir staðalfrávikum stika eru líkur á að misdreifni eigi sér stað.

- F-próf

  Tölfræðigildi sem notað er til að prófa núll-kenninguna að allir stikar líkansins (fyrir utan fasta) séu núll:

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(T-k)} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(T-k)}$$

- Durbin-Watson gildið

  DW er notað til þess að kanna hvort að í líkaninu sé fyrstu-gráðu sjálffylgni.

- Chi-kvaðrat spápróf

  Próf sem mælir samkvæmni stika líkansins undir núll-kenningunni að allir stikar líkansins eru eins í uprunalega úrtakstímabili og á spátímabili.

$$\chi^2_{(T^*-T)} = \frac{\sum_{t=T+1}^{T^*} e_{ft}^2}{\sigma^2} = \frac{(T^*-T)\, MSE_f}{\sigma^2}$$

  þar sem að $MSE_f = \frac{\sum e_{ft}^2}{T^*-T}$

- Chow-stöðugleikapróf

  Próf þetta kannar samkvæmni stika líkansins yfir allt úrtaks- og spátímabilið.

$$\chi^2 = \frac{(RSS^* - RSS)/(T^*-T)}{RSS/(T-k)}$$

  þar sem að RSS^* er summa afgangsliða þegar líkanið er metið bæði yfir úrtakstímabil og spátímabil.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

6.3.2 Líkan 3.1

Þetta líkan er einfalda líkanið sem sett var fram í jöfnu (6.1):

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t$$

Eftirfarandi atriði einkenna mat líkansins

- Fittið er gott ($R^2 = 0.9137$)
- Metlar eru marktækir
- Durbin-Watson innan marka (þ.e. 1-gráðu sjálffylgni hafnað)
- Venjulegu- og misdreifnismetlarnir eru svipaðir.
- Bæði chi-kvaðrat spáprófið og chow-stöðugleikaprófið hafna núll-kenninguni að engar breytingar verði á stikum líkansins
- Línulegt trend er í líkaninu og árstíðarsveiflur.

Þótt undarlegt megi virðast skilar ævitekjulíkanið (6.9) ekki betri niðurstöðum. spáprófum er hafnað og stuðull tafinar neyslu er neikvæður í beinni andstöðu við kenninguna. Gallar þessara tveggja líkana felast einkum í því að þau taka ekki tillit til tölfræðilegra eiginleika tímaraðanna, þ.e. trends og árstíðarsveiflna.

6.3.3 Líkan 3.3

Þetta líkan byggir á einfalda neyslulíkaninu en tekur einnig tillit til trends, árstíðarsveiflna og trends í árstíðarsveiflum. Skilgreindar eru gervibreytur fyrir árstíðirnar $Q1_t$, $Q2_t$, og $Q3_t$ (ekki ráðlagt að hafa þær fjórar þar sem líkanið er metið með fasta). Breyta T er skilgreind sem tími, $DT1_t$, $DT2_t$, $DT3_t$ sem gervibreytur með trendi og DO_t gervibreyta sem tekur tillit til óvenjulegra atburða.. Líkanið er því:

$$C_t = \beta_0+\beta_1 Y_t+\beta_2 Q1_t+\beta_3 Q2_t+\beta_4 Q3_t+\beta_5 T+\beta_6 DT1_t+\beta_7 DT2_t+\beta_8 DT3_t+\beta_9 DO_t+\varepsilon_t$$

Eiginleikar þessa líkans eru þeir að: Meirihluti stika eru marktækir, en líkanið fellur á spáprófi og stöðugleikaprófi.

Þegar ofangreindum breytum er bætt við ævitekjulíkanið (6.9) fær stiki tafinnar neyslu rétt formerki, en líkanið felur á spáprófinu. Einnig er langtímajaðarneysluhneigð 0.310 sem er mjög lágt m.v. það sem vænta mætti út frá ævitekjukenningunni.

6.4 DSHY líkanið

6.4.1 Líkanið skilgreint

Upprunalega líkan DSHY er eftirfarandi

$$\Delta_4 c_t = \beta_1 \Delta_4 y_t + \beta_2 \Delta\Delta_4 y_t + \beta_3 \Delta_4 DO_t + e_t \tag{6.11}$$

þar sem að c_t og y_t eru náttúrulegir lógariþmar af neyslu og tekjum. Delturnar eru mismunaoperatorar, þ.a. $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$, og $\Delta_4 x_t = x_t - x_{t-4}$. Við fyrstu sýn virðist líkanið eiga lítið sameiginlegt með ævitekjukenningunni eða neyslukenningu Keynes. Þetta líkan inniheldur þó báðar þessar kenningar og er almennara en fyrri líkön.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Stærðir í lógariþmum?

Það að hafa breytur í lógariþmum má rökstyðja með tvennum hætti. Tölfræðin segir að ef staðalfrávik gagnaraðar er í hlutfalli við gildi hennar í hverri athugun munu gögnin umbreytt yfir í logariþma skila nokkurnveginn stöðugri dreifni. Efnahagsleg rök eru sú að hægt er að nota logaritma til þess að taka út exponential vöxt og gera hann línulegan.

Fjórði mismunur

Í fyrra líkani voru settar upp gervibreytur fyrir árstíðir til þess að taka sveiflur úr líkaninu. Gervibreytur taka upp frígráður og eru hættulegar í líkanasmíð. Betra er að geta metið líkanið og árstíðaráhrifin án þess að kalla til aukabreytur. Einfaldasta leiðin til þess er að taka fjórða mismun af jöfnunni þannig að hver gagnapunktur beri saman breytingar sem verði milli ára fyrir hverja árstíð, þ.e. árstíðareffektinn dettur út.

Til að sýna fram á hvernig þetta er útfært skulum við byrja með einfalt líkan í lógariþmum

$$c_t = \alpha_1 + \alpha_2 y_t + \alpha_3 DO_t + \varepsilon_t \tag{6.12}$$

Tefjum jöfnu (6.12) um fjögur tímabil og drögum frá (6.12):

$$\Delta_4 c_t = \alpha_2 \Delta_4 y_t + \alpha_3 \Delta_4 DO_t + \Delta_4 \varepsilon_t \tag{6.13}$$

Líkan þetta er þó ekki alveg það sama og sett var fram í upphafi kaflans því einn lið vantar enn:

Cointergration liður

Einn lið vantar í jöfnu (6.13) þannig að hún sé sambærileg við upprunalegu jöfnu DSHY (6.11) en sá liður er:

$$\Delta\Delta_4 y_t = (y_t - y_{t-4}) - (y_{t-1} - y_{t-5}) \tag{6.14}$$

Þessa jöfnu má skýra tölfræðilega þanig að hún sé það form sem tekur ólínulegan vöxt út úr tekjuröðinn. Hagfræðileg skýring er eftirfarandi: jafna (6.11) gefur til kynna að neysla ársfjórðungs sé sú sama og neysla ári á undan breytt með β_1 sinnum breytingar í tekjum á sama tímabili. Ef tekjur breytast meira en tekjubreytingar síðustu mælinga eru þessar tekjur slembitekur sem fara ekki beint í neyslu. Þetta metur liðurinn $\beta_2 \Delta\Delta_t y_t$ en β_2 ætti samkvæmt ofangreindri röksemdafærslu að vera negatíf.

Almenna jafna - sértilfelli

Upprunalega jafnan $\Delta_4 c_t = \beta_1 \Delta_4 y_t + \beta_2 \Delta\Delta_4 y_t + \beta_3 \Delta_4 DO_t + e_t$ er sértilfelli af almennara líkani. Endurritum jöfnuna:

$$c_t = c_{t-4} + (\beta_1 + \beta_2)\, y_t - (\beta_1 + \beta_2)\, y_{t-4} - \beta_2 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-5} + \beta_3 DO_t - \beta_3 DO_{t-4} + e_t \tag{6.15}$$

en jafna þessi er sértilfelli af eftirfarandi almennri jöfnu:

$$c_t = \theta_1 c_{t-4} + \theta_2 y_t + \theta_3 y_{t-4} + \theta_4 y_{t-1} + \theta_5 y_{t-5} + \theta_6 DO_t + \theta_7 DO_{t-4} + e_t \tag{6.16}$$

þar sem eftirfarandi skilyrði gilda: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = -\theta_3$, $\theta_4 = -\theta_5$ og $\theta_6 = -\theta_7$

Þegar almenna líkanið er metið með takmörkunum og án þeirra er lítill munur á metlum og því kjósum til takmarkaða líkanið fram yfir það almenna.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

6.4.2 Líkanið metið

Upprunalega líkanið er hér metið:

$$\Delta_4 c_t = \beta_1 \Delta_4 y_t + \beta_2 \Delta\Delta_4 y_t + \beta_3 \Delta_4 DO_t + e_t \tag{6.17}$$

Það kemur í ljós að DW tilgátunni um enga sjálffylgni er hafnað. Einnig kemur upp vandamál varðandi langtímajafnvægi líkansins því líkanið hefur ekkert að segja í þeim efnum. Setjum $c_t = c_{t-4}$ og $y_t = y_{t-1}$ þannig að $\Delta_4 c_t = \Delta_4 y_t = \Delta\Delta_4 y_t = 0$ og stingum inn í jöfnu (6.11). Þetta leiðir til þess að:

$$0 = \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 \tag{6.18}$$

en ekkert samband kemur fram í þessari jöfnu. Hægt er þó að leysa út langtímajafnvægi ef við gerum ráð fyrir því að stöðugur vöxtur sé í tekjum og neyslu, þ.e. $\Delta_4 c_t = \Delta_4 y_t = g$ og $\Delta\Delta_4 y_t = 0$.

DSHY gerðu sér grein fyrir því að nausynlegt væri að hafa líkan sem segði til um einingar-tekjuteygni þegar til lengri tíma væri litið

Villuleiðrétting (*e. error correction mechanism)*

Hafgræðileg kenning gerir ráð fyrir því að til lengri tíma gildi ákveðið hlutfallssamband milli neyslu og tekna, þ.e. $C_t = K \cdot Y_t$, þar sem að K er fasti fyrir gefið vaxtastig þannig að langtíma-meðalneysluhneigð væri fasti. Líkan (6.17) skýrir neyslu út frá breytingum sem miðast við breytingar á neyslu árið á undan. Gerum ráð fyrir því að fyrir einu ári hafi neytandi ekki verið með meðalneysluhneigð jafna K, þ.e. að

$$\frac{C_{t-4}}{Y_{t-4}} \neq K, \quad \text{eða} \ (c_{t-4} - y_{t-4}) \neq \ln K \tag{6.19}$$

Ef hlutfallið er meira en K verður neytandinn af minnka neyslu dagsins í dag hlutfallslega m.v. neyslu síðasta árs til þses að komast aftur á langtíma-jafnvægi og öfugt ef hlutfallið er minna en K. Því er réttlætanlegt að bæta við liðnum $(c_{t-4} - y_{t-1})$við jöfnu (6.17). Líkanið er þá eftirfarandi:

$$\Delta_4 c_t = \beta_1 \Delta_4 y_t + \beta_2 \Delta\Delta_4 y_t + \beta_3 \Delta_4 DO_t + \beta_4 (c_{t-4} - y_{t-4}) + e_t \tag{6.20}$$

þar sem gert er ráð fyrir því að β_4 sé neikvæð stærð. Þessi viðbótarliður gerir ráð fyrir því að neytandinn reyndi að leiðrétta skammtímaójafnvægi. Ofangreint líkan kemur út sem besta líkanið metið til þessa og inniheldur kyrrstæðar og stöðugar jafnvægislausnir. Til þess að fá út kyrrstætt jafnvægi setjum við alla mismuni sem núll og fáum út:

$$\beta_4 (c_{t-4} - y_{t-4}) = 0 \tag{6.21}$$

Almennt séð er $\beta_4 \neq 0$ og því er langtíma-kyrrstæð lausn $c_t = y_t$. Fyrir stöðugt jafnvægi þar sem að neysla og tekjur vaxa á föstum hraða g verður líkanið:

$$\begin{aligned} g &= \beta_1 g + \beta_4 (c_{t-4} - y_{t-4}) \\ & \quad \text{eða} \\ c_{t-4} &= y_{t-4} + \frac{g(1-\beta_1)}{\beta_4} \end{aligned} \tag{6.22}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Verðbólga

Líkan metið með villuleiðréttingu einkennist af: marktækum stikum og góðu DW gildi en líkanið fellir núll-tilgátuna um samkvæma stika með 1% marktæknikröfu. Spátímabilið kemur einna verst út og töldu DHSY þennan lélega árangur stafa af verðbólguáhrifum. Jafnvel þótt gögnin væru öll á föstu verðlagi tekur líkanið ekki tillit til eftirfarandi atriða

- **Peningaglýja**

  Þegar neytendur taka ekki eftir verðhækkunum en túlka tekjuhækkun sem hækkun á rauntekjum eru þeir haldnir peningaglýju. Þeitta réttlætir nýjan stika í líkaninu fyrir verðbreytingar sem að öllum líkindum er jákvæður

- **Óvænt verðbólga**

  Verðbólga er oft óvænt, þannig að neytendur túlki verðhækkun vara sem þeir kaupa oft, sem hlutfallslega hækkun frekar en almenna hækkun verðlags. Svar neytenda við slíkum verðhækkunum er að minnka neyslu sína.

Því settu DHSY fram nýtt líkan sem tók tillit til verðbólguáhrifa:

$$\Delta_4 c_t = \beta_1 \Delta_4 y_t + \beta_2 \Delta\Delta_4 y_t + \beta_3 \Delta_4 DO_t + \beta_4 (c_{t-4} - y_{t-4}) + \beta_5 \pi_t + \beta_6 \Delta\pi_t + e_t \tag{6.23}$$

þar sem að verðbólga er nálguð með $\pi_t = \Delta_4 p_t$ en p_t er náttúrulegur lógariþmi af þeirri vísitölu sem notuð er til þess að færa neyslutölur á fast verðlag.

Þegar líkan (6.23) er metið eru niðurstöður eftirfarandi:

- Gott Durbin Watson gildi
- Stikar samkvæmir. Ekki hægt að hafna núll-kenningu spá-og stöðugleikaprófs um að stikar séu óbreyttir milli upprunalega- og spátímabils.
- Besta líkan til þessa

6.5 Aðferðarfræði DHSY líkansins

Helsta gagnrýni á DHSY líkanið beinist að því að líkanið var fínpússað með gagnaútgerð. Hér er þó ekki um hreina gagnaútgerð að ræða þar sem hvert skref var vandlega rökstutt með efnahags- og tölfræðilegum röksemdum áður en nýtt líkan var reynt. DHSY gerðu sér grein fyrir þessu vandamáli

DHSY ráðlögðu að lágmarkskröfur á nýtt líkan skyldu vera þær að hið nýja líkan geti skýrt af af hverju niðurstöður fyrri líkana voru eins og þær voru og koma með nýjar skýringar sem ekki voru í fyrri líkönum. Ný líkön eiga að vera túlkanleg út frá fræðilegu sjónarmiði og vera samkvæm einkennum gagnanna. Í DHSY var þetta gert með því að staðla þrjú samkeppnismódel þannig að þau gengu á sömu gögn, notuðu sömu árstíðarleiðréttingu o.fl. Í öðru lagi var hannað almennt líkan sem innihélt fyrri líkönin þrjú sem sértilfelli. Þegar ekki er hægt að hafna takmörkunum á almennu líkani er restricted líkanið talið betra því það er einfaldara.

Fræðimenn eru gjarnan þöglir þegar umræða snýst að skammtíma-eiginleikum hagrænna líkana, sérstaklega þegar rökstyðja þarf tafalengdir o.fl. DSHY leystu vandamál tafa með því að hafa líkanið almennt í upphafi með miklum fjölda tafa, en fella síðan þær tafir út sem ekki standast tölfræðileg próf

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Eftirfarandi forsendur eru fyrir hinni hefðbundnu aðferðarfræði Cowles commission

- Fyrirfram ákveðið hliðarskilyrði
- Metlar óháðir tíma
- Metlar óháðir breytingum í innri og ytri stærðum
- Þekkt orsakasamhengi
- Enginn samanburður við "samkeppnis"líkön (rival models)

Aðferðarfræði DHSY byggir að miklu leiti á þessum forsendum, þ.e. ef undanskilin er sú síðasta.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 7

Cointergration

7.1 Inngangur

Stochastic process

Fjölskylda af hendibreytum sem raðaðar eru eftir tíma. Dæmi $\{X_t\}$ er stochastic process með stökum: $X_1,\ X_2, ..., X_t$. Ef allar hendingarnar X_t hafa vongildi getum við ritað vongildi stochastic process sem $\{\mu_t\}$. Dreifni raðar er $\{\sigma_t^2\}$ .Ef variansinn er sá sami fyrir hverja hendingu er varíans σ^2. Í tímaröðum er aðeins eitt stak á hverjum tíma.

Sterk sístæðni (strict stationarity)

Þéttifall allra hendinga er eins, þ.e.

$$F(X_{t1}, ..., X_{t+n}) = g(X_{t+n+1}, ..., X_{t+2n+1}) \tag{7.1}$$

Veik sístæðin (weak stationarity)

Tímaröð er sístæð ef væntanlegt gildi hverrar hendingar er það sama fyrir allar mælingar, þ.e. $E(X_t) = \mu$ og dreifni stöðug yfir tíma, þ.e. $Cov(X_t X_{t+j}) = \sigma_j$. Til þess að hægt sé að finna vongildi raðar verður hún að vera sístæð. Aðfallsgreining á ósístæðum röðum skilar vafasömum niðurstöðum.

Ráf (random walk)

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.2}$$

Ráf er greinilega ósístætt ferli þar sem dreifni eykst með tíma.

Ráf með reki (random walk with a drift)

Sama og random walk nema hvað röðin rekur í ákveðna átt.

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.3}$$

Leitni

Ef að leitni er í röð er hún ekki sístæð. Leitni má skipta í tvo flokka: hendileitni (dæmi: Random walk) og ákveðna leitni (Dæmi: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Einnig er til sambland af þessu tvennu: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + y_{t-1} + \varepsilon_t$. Leitni má fjarlægja með því að taka mismun. Dæmi um þetta er:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta y_t &= y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t \end{aligned}$$

Annað dæmi er þegar að sjálffylgni er í afgangsliðum:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \alpha\varepsilon_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

Tökum mismun:

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

en þessi röð er sístæð ef að $|\alpha| < 1$.

7.2 Ósístæðar raðir og heildun raða

Ósístæðar raðir og aðfallsgreining er ekki góð blanda. Þetta má sýna fram á með dæmum. Gerum ráð fyrir því að y_t og x_t eru óháðar breytur myndaðar með random walk. Newbold og Davies útbjuggu 1000 úrtök af tímaröðum með 50 breytum og keyrðu aðfallsgreiningar á allar raðir. Þeir komust að því að 67% aðfallsgreininganna skiluðu marktækum student-t gildum á 5% marktæknistigi. Annað dæmi um þetta er þegar að gerð var tilraun til þess að skýra einkaneyslu í Bretlandi með random walk ferli, en niðurstöðurnar urði marktækar þótt ekkert raunverulegt samband hafi ríkt milli slembiraðarinnar og einkaneyslunnar.

7.2.1 Heildun raða

Ósístæð röð sem umbreyta má yfir í sístæða röð með því að taka mismun d sinnum er sögð vera heildanleg af gráðu d (*e integrated of order d*), þ.e. x_t S $I(d)$. Það skal tekið fram að d er minnsti fjöldi mismuna sem skilar sístæðri röð. Ef x_t er sístæð er $d = 0$.

Línuleg samantekning (summa) sístæðra raða er sístæð: $I(0) + I(1) = I(1)$.

7.2.2 Árstíðarheildun raða

Ósístæð röð er kölluð árstíðarheildanleg röð af gráðu (d,D), táknað $SI_s(d, D)$ ef hægt er að umrita hana yfir í sístæða röð með því að taka árstíðarmismun D sinnum og taka síðan venjulegan mismun d sinnum. Í flestum tilfellum er ekki nauðsynlegt að taka fleiri en einn árstíðarmismun.

7.2.3 Próf á gráðu heildunar

Oft vitum við ekki fyrirfram hvaða heildunargráða mun skila okkur sístæðri röð. Það er því nauðsynlegt að geta prófað fyrir þessari gráðu.

Tillaga að lausn

Metum $y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$ með OLS.

Ef $\rho = 1$ þá er röðin ósístæð. Ef $|\rho| < 1$ er röðin sístæð. Ekki er hægt að meta ρ út frá t-gildum, þar sem að t-gildi eru ekki marktæk ef röðin er ósístæð. Það er því nauðsynlegt að nota önnur próf en t-próf.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Dickey Fuller prófið

DF prófið kannar hvort $\rho = 1$ í jöfnuni hér að ofan. DF prófið byggir á svipaðri aðfallsgreiningu og liðurinn hér á undan, eða:

$$\Delta y_t = \delta \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

eða

$$y_t = (1 + \delta) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.4}$$

sem er sama aðfallsgreininginn og í liðnum hér á undan þar sem $\rho = (1 + \delta)$. Ef δ er negatíft verður ρ minni en einn. DF prófið kannar því hvort stuðulinn δ sé negatívur. Kenningaprófunin er eftirfarandi:

$$\begin{array}{llcll} H_0: & \delta = 0 & \Leftrightarrow & \rho = 1 & \text{ósístæð} \\ H_1: & \delta < 0 & \Leftrightarrow & \rho < 1 & \text{sístæð} \end{array}$$

Nauðsynlegt er að vita dreifingu hendingarinnar sem notuð er við kenningaprófun. Þessi dreifing hefur verið reiknuð út og er í viðauka í NDEP. T-gildi aðfallsgreiningar er tekið og borið saman við DF töflu. Ef T-gildið er minna en lægra gildi töflu er H_0 hafnað og ef T-gildið er meira en stærra gildi töflu er H_0 samþykkt. Ef T-gildið er á milli lægra og stærra gildis er ekkert hægt að segja.

Ef H_0 er samþykkt er nauðsylegt að halda áfram, taka mismun og framkvæma DF á nýjan leik þar til að núll-kenningunni er hafnað. Ath: hætta getur verið á yfir-mismunun ef búið er að taka mismun of oft. Yfir-mismunun lýsir sér í háu pósitívu DF gildi og háu R^2.

Hægt er að nota DF próf þegar verið er að heilda hendiröð með drifti

Bætt Dickey-Fuller próf (Augmented DF)

Einn helsti galli DF prófsins er sá að það tekur ekki tillit til mögulegrar sjálffylgni á afgangsliðum. Lausn á þessu er að tefja gildi vinstra megin við jafnaðarmerkið og nota þau sem skýristærðir.

$$\Delta y_t = \delta \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i \cdot \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{7.5}$$

Erfitt getur verið að ákvarða k. Meginreglan er þó sú að það eigi að vera hlutfallslega lágt til að spara frígráður en þó nægjanlega stórt til þess að taka tillit til mögulegrar sjálffylgni. Hægt er að nota DW prófið til þess að nálgast k. Kenningaprófun er sú sama í ADF og DF.

Intergration Durbin-Watson (IDW)

IDW gefur vísbendingu um það hvort töð sé heilduð af gráðu 0 eða ekki. IDW prófið er:

$$IDW = \frac{\sum (y_t - y_{t-1})^2}{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2} \tag{7.6}$$

Ef $\rho = 1$ er nefnarinn jafn $\Sigma\varepsilon^2$, þ.e. y_{t-1} samsvarar 'fitted' gildi fyrir aðfallsgreiningu y_t á y_{t-1} undir því skilyrði að stikinn fyrir y_{t-1} sé einn.

Ef IDW er lágt (minna en 0.5) er nokkur vissa fyrir því að röðin sé ekki sístæð. Ef IDW gildið er nærri tveimur er nokkur vissa fyrir því að röðin sé sístæð.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

7.3 Hugtakið cointergration

Það að taka mismun er ekki gallalaus lausn á ósístæðnivandanum. Þegar mismunur er tekinn tapast langtímalausn líkans. Cointergration aðferðarfræðin myndaðist út frá löngun manna til þess að meta líkön sem innihalda bæði skammtíma- og langtímalausnir og halda öllum röðum sístæðum á sama tíma.

7.3.1 Formleg skilgreining fyrir 2 breytur

Tímaraðir x_t og y_t eru sagðar cointergreraðar af gráðu d, b þar sem að $d \geq b \geq 0$, þ.e. $x_t, y_t \;\mathsf{s}\; I(d, b)$ ef:

- Báðar raðir eru heildaðar af gráður d
- Til er línuleg samantekt breytanna tveggja sem er heildanleg af gráðu $d-b$, þ.e.:

  $$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \;\mathsf{s}\; I(d-b)$$

  þar sem að $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ er cointergration vektor

7.3.2 Almenn skilgreining

Ef $\mathbf{x}_t$ er $n \times 1$ vektor af tímaröðum og

- Hver þeirra er $I(d)$
- Til er $n \times 1$ vektor $\boldsymbol{\alpha}$ þannig að $\mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\alpha} \;\mathsf{s}\; I(d-b)$

þá gildir:
$\mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\alpha} \;\mathsf{s}\; CI(d, b)$
Vandamálið verður flóknara eftir því sem röðum fjölgar.

7.3.3 Cointergration í praksís

Áhugaverðasta sambandið ríkir þegar $d = b$ en þá samsvara stuðlar cointergration vektorsins stuðlum langtímasambands milli breyta.

7.4 Próf á cointergration

7.4.1 Tveggja þrepa algoriþmi

- **Val á breytum**

  Hugsum okkur tvær breytur. Viljum prófa fyrir cxointergration. Báðar verða að vera af sömu gráðu

- **Cointergration vektor ákvarðaður**

  - **Cointergration vektor þekktur**
    Stundum höfum við kenningu sem segir til um hvernig cointergration vektorinn eigi að líta út. Dæmi um þetta er kenningin um fullkomna tekjuteygni einkaneyslu til langs tíma, þ.e. $cons_t^* = inc_t$, en í þessu

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

tilfelli er cointergrating vektor $[-1, 1]$. Í þessu tilfelli er nauðsynlegt að prófa hvort línulega samantektin er sístæð. Myndum röð samantekarinnar: $u_t = cons_t - inc_t$ og prófum með DF (m=0)

– **Cointergration vektor óþekktur**
  Höfum langtímasamband: $y_t = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_{mt} + v_t$ og cointergration vektor $[1, -\beta_1, \cdots, -\beta_m]$ sem er óþekktur. Metum langtímasambandið og könnum metil afgangsliðsins $\hat{v}_t$ með DF eða ADF

7.4.2 Cointergration Durbin-Watson (CIDW)

CIDW gefur vísbendingu um cointergration með því að meta hvort metin frávik frá langtímabraut eru sístæð.

$$CIDW = \frac{\sum (\hat{v}_t - \hat{v}_{t-1})^2}{\sum (\hat{v}_t - \hat{v}_t)^2} \tag{7.7}$$

Dreifing fyrir CIDW er ekki þekkt en þó má segja að þeim mun minni sem gildi CIDW tekur því meiri líkur eru á því að hafna megi núll-kenningunni að raðirnar séu cointergreraðar. Þumalputtaregla er að ef CIDW reiknað út frá afgangsliðum jöfnu er minna en R^2 eru líkur á því að að hafna megi núll kenningunni.

7.5 Villuleiðréttingarlíkön (ECM)

7.5.1 Granger representation theorem

Fyrir sérhverjar cointergreraðar raðir er til villuleiðréttingarlíkan

7.5.2 ECM leitt út

Þessi útleiðsla er sérstaklega hentug fyrir þau tilfelli þegar að annað hvort:

- allar breytur sem koma fyrir í langtímasambandi eru I(1)
- háða breytan er I(1) og allar skýristærðir eru $CI(d+1, d)$

Til einföldunar gerum við ráð fyrir einni skýristærð, þ.e.

$$y_t = \beta x_t + u_t \tag{7.8}$$

þar sem að y_t og x_t eru báðar $I(1)$. Gerum ráð fyrir því að stikinn β sé óþekktur en að OLS mat skili sístæðum afgangsliðum samkvæmt DF. Með öðrum orðum: samþykkja má cointergration y_t og x_t af gráðu (1,1) með cointergration vektor $\left[1, -\hat{\beta}\right]$. Næsta skref er að skipta út langtímalíkani með skammtímalíkani + ECM, þ.e.:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 (y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{7.9}$$

Freistandi er að útvíkka ofangreinda jöfnu og meta hana svo með OLS:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 y_{t-1} - \alpha_2 \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.10}$$

en það er ekki góð lausn þar sem að:

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

- annar metill er fenginn fyrir β og ekki er vitað hvort hann sé cointergration stiki eða ekki

- breyturnar eru heildaðar af mismunandi gráðum. Δy_t og Δx_t eru $I(0)$ en y_{t-1} og x_{t-1} eru $I(1)$. Ef að skilyrðið $(\alpha_2 y_t - \alpha_2 \beta x_t) \sim I(0)$ er ekki til staðar felur jafnan í sér þá forsendu að $\varepsilon_t \sim I(1)$

Engle-Granger komu með tveggja þrepa lausn á þessum vanda:

- Meta (7.8) með OLS og meta hvort afgangsliðir séu sístæðir

- Ef sístöðugleika er ekki hafnað$\Rightarrow$skipta út β með metlinum $\hat{\beta}$.

Nú er skilyrðum fyrir sístæðum röðum fullnægt og allar breytur eru $I(0)$

Aðferð Engle-Granger hefur verið gagnrýnd fyrir það að OLS sé keyrt á ósístæðar raðir til þess að finna langtímasambönd. OLS er þó ekki alslæmur og skilar oft samböndum með nægjanlega góðum hætti.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 8

Þversniðsgögn

8.1 Tvíval (*e. Binary Choise*)

Þegar ein eða fleiri ytri stærð er tvívalsstærð er hægt að setja þær fram sem dummy breytur í venjulegri aðfallsgreiningu. Þegar innri stærð er tvívalsstærð verður málið flóknara. Hægt er að meta líkan með VAMK en sá metill verður ekki nýtinn þar sem að:

- Ekkert gefur til kynna að vongildi innri stærðar sé fyrir innan rétt bil, þ.e.
  $E(y_i) = x_i'\beta = P_i$ - 1

  Þessi forsenda getur brostið þegar notað er vigtað OLS til þess að leiðrétta fyrir misdreifni.

- Misdreifni afgangsliða

  $$e_i = \begin{cases} 1 - x_i'\beta & \text{með líkum } x_i'\beta \\ -x_i'\beta & \text{með líkum } 1 - x_i'\beta \end{cases}$$

  Dreifni Bernoulli dreifingarinnar er: $Var(e_i) = E(Y_i)(1 - E(Y_i)) = P_i(1 - P_i)$. Augljóslega má sjá að dreifni er meiri við miðju (t 0.5) en við endamörkin (1 og 0)

Getum ritað líkindafall fyrir innri stærðina: $f(y_i) = p_i^{y_i}(1 - P_i)^{y_i}$, en hún hefur þá eiginleika að $f(1) = P_i$ og $f(0) = (1 - P_i)$. Fyrir þessa dreifingu er ekki til þéttifall.

Hægt er að gera fallið samfellt með því að brúka notagildi:

$$\begin{aligned} U_{i0} &= \bar{U}_{i0} + e_{i0} = \mathbf{z}_{i0}'\boldsymbol{\delta} + \mathbf{w}_i\boldsymbol{\gamma}_0 + e_{i0} \\ U_{i1} &= \bar{U}_{i1} + e_{i1} = \mathbf{z}_{i1}'\boldsymbol{\delta} + \mathbf{w}_i\boldsymbol{\gamma}1 + e_{i1} \end{aligned}$$

þar sem að U_{i0} er notagildi einstaklings af ákvörðun 0 og U_{i1} notagildi af ákvörðun 1. z_{i0}' og z_{i1}' eru vektorar sem standa fyrir einkenni möguleikanna eins og einstaklingur i sér þá en w_i' er vektor yfir hagfræðileg einkenni einstaklings i. Skilgreinum $y_i^* = U_{i1} - U_{i0} > 0$ og ályktum að gildi slembistærðarinnar y_i ákvarðist á eftirfarandi hátt:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Ef } y_i^* > 0 \\ 0 & \text{Ef } y_i^* < 0 \end{cases}$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Umritum y_i^* á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned} y_i^* &= (\mathbf{z}_{i1} - \mathbf{z}_{i0})' \boldsymbol{\delta} + w_i' (\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_0) + (e_{i1} - e_{i0}) \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{z}_{i1} - \mathbf{z}_{i0}) & w_i \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ (\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_0) \end{bmatrix} + e_i^* \\ &= \mathbf{x}_i^{'} \beta + e_i^* \qquad (8.1) \end{aligned}$$

Líkurnar á því að y_i sé einn eru því:

$$\begin{aligned} P_i &= \Pr[y_i = 1] = \Pr[y_i^* > 0] = \Pr[e_i^* > -\mathbf{x}_i' \beta] \qquad (8.2) \\ &= 1 - \Pr[e_i^* \leq -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}] = 1 - F(-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) = F(-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) \qquad (8.3) \end{aligned}$$

En e_i^* þarf að hafa dreifingu svo hægt sé að meta þessar líkur. Logit líkanið gerir ráð fyrir því að villuliður sé normaldreifður. Dreififallið er eftirfarandi:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{-x^2}{2} \right\} dx$$

$$\Pr(y_i = 1) = 1 - \Pr(e_i^* < -x_i' \beta) = 1 - F(-x_i' \beta)$$

Næsta mál á dagskrá er hvernig beri að meta β. Tvær aðferðir koma til greina:

8.1.1 Mat þegar að um endurteknar athuganir er að ræða

Þessari aðferð er hægt að beita þegar að við höfum fleiri en eina athugun fyrir hvern ákvörðunartaka, þ.e. fyrir hvert i er $(1 \times K)$ vektor af x_i' og n ákvarðanir, þ.e. $X_{(n_i \times K)}$sem er (n_i). Skilgreinum p_i sem fjölda skipta sem ákvörðun 1 er valin deilt með fjölda athugana. Því gildir eftirfarandi:

$$p_i = \bar{P}_i + e_i = F(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) + e_i$$

þar sem að e_i hefur vongildi núll og dreifni: $var(e_i) = P_i (1 - P_i) / n_i$ þar sem að gefin er sú forsenda að p_i sé óbjagaður (og samkvæmur) metill fyrir P_i.

Skilgreininum tölulega eiginleika:

$$v_i = F^{-1}(p_i) = F^{-1}(P_i + e_i)$$

Beitum Taylor útvíkkun[1]:

$$\begin{aligned} v_i &= F^{-1}(P_i) + \left(F^{-1}(P_i)' e_i \right) \\ &= F^{-1}(P_i) + \frac{e_i}{f(F^{-1}(P_i))} \end{aligned}$$

Síðari liðurinn er fasti og því má umrita:

$$v_i = x_i' \beta + u_i$$

$$\begin{aligned} E(u_i) &= 0 \\ var(u_i) &= \frac{1}{f(F^{-1}(P_i))^2} \cdot \frac{P_i(1 - P_i)}{n_i} \end{aligned}$$

Getum ritað kerfið í heild sinni sem $v = X\beta + u$ og metið B með GLS:

$$\hat{\beta} = \left(X' \hat{\Phi}^{-1} X \right)^{-1} X' \hat{\Phi}^{-1} v$$

[1] $F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + F'(x_0) \Delta x$ (+ afgangur)

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

8.1.2 Maximum likelihood

Þegar aðeins nokkrar athuganir eru til fyrir hvern ákvörðunartaka er ekki mögulegt að nota þá aðferð sem var lýst hér að ofan. Þá reynist nauðsynlegt að hámarka sennileikafall. Gefum okkur T athuganir þar sem hver athugun getur verið hjá sitt hvorum einstaklingum:

$$\begin{aligned} l &= \prod_{i=1}^{T} f(y_i) = \prod_{i=1}^{T} P_i^{y_i} (1-P_i)^{(1-y_i)} \\ &= \prod_{i=1}^{T} F(x_i'\beta)^{y_i} (1-F(x_i'\beta))^{(1-y_i)} \end{aligned}$$

Sennileikafallið er því:

$$\ln l = \sum_{i=1}^{T} y_i \ln F(x_i'\beta) + \sum_{i=1}^{T} (1-y_i) \ln (1-F(x_i'\beta))$$

8.2 Takmarkaðar háðar breytur

Þegar háða breytan getur aðeins verið á takmörkuðu bili er ekki. Dæmi um þetta er ákvörðun einstaklings að kaupa t.d. bíl. Annað hvort kaupir hann bíl og greiðir ákveðna upphæð eða ekki og greiðir þá ekki neitt. Í slíku líkani er gert ráð fyrir því að nytjahámörkun útgjalda á varanlega vöru sé skýrð með eftirfarandi jöfnu:

$$y_i^* = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_i \tag{8.4}$$

þar sem að $\mathbf{x}_i'$ er $(1 \times K)$ vektor af skýristærðum og e_i s $iid\ N(0, \sigma^2)$. Vandamál heimils er það að ákveðin lágmarksupphæð er nauðsynleg til þess að kaupa bíl, t.d. c. Því er mæld eyðsla eftirfarandi:

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{ef } y_i^* > c \\ 0 \text{ eða } c & \text{ef } y_i^* \leq c \end{cases}$$

Ef við gerum ráð fyrir því að c sé þekkt stærð getum við dregið hana frá báðum megin við jafnaðarmerkið í jöfnu (8.4). Fasti jöfnunar er því upphaflegi fastinn að c frádregnu:

$$y_i = \begin{cases} \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_i & \text{ef } \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_i > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

G.r.f. að fjöldi athuganna sé T, þar af T_0 athuganir þar sem $y_i = 0$ og T_1 athuganir þar sem $y_i > 0$. Hvað myndi gerast ef T_0 athugunum yrði einfaldlega sleppt og T_1 notaðar?

$$E[y_i|y_i > 0] = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + E[e_i|y_i > 0] \tag{8.5}$$

Villuliðurinn hverfur hinsvegar ekki. Hugsum okkur að villuliðurinn sé iid normal:

$$E[e_i|y_i > 0] = Ee_i|e_i > -\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

En dreififall normaldreifingarinnar er takmarkað neðan frá við $-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ og því er vænt gildi normalstærðarinnar ekki lengur einn. Hin nýja dreifing er heldur ekki samhverf um vongildi sitt.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Lausn á þessum vanda er að meta $\boldsymbol{\beta}$ og σ^2 með því að nota aðferð hámarkssennileika. Fyrir athuganir $y_i = 0$ vitum við einungis að $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + e_i < 0$ eða $e_i < -\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ og því gildir eftirfarandi:

$$\Pr\left[y_i = 0\right] = \Pr\left[e_i < -\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right] = \Pr\left(\frac{e_i}{\sigma} < -\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) = 1 - F_i$$

Þéttifallið verður því:

$$l = \mathbf{\Pi}_0\left(1 - F_i\right)\mathbf{\Pi}_1\left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\left(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\right)^2/2\sigma^2\right)$$

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

Kafli 9

VAR - Vector Autoregression

9.1 Almennt VAR líkan

Á sjötta áratugnum sætti hefðbundin líkanasmíð mikilli gagnrýni. Gagnrýni beindist einna helst að því hvernig breytur voru valdar og aðrar felldar út til þess að auðkenna jöfnukerfi. Einnig var lúkasargagnrýni beitt, en hún segir til um að stuðlar þjóðhagslíkana breytist með væntingum. Árið 1980 kom Sims fram með aðferðarfræði sem var, að hans sögn, var mun hagkvæmari leið til þess að skoða sambönd þjóðhagsstærða. VAR-líön notea ekki hagfræðikenningar líkt og hefðbundin þjóðhagslíkön, heldur eru þau eingöngu reist á tölfræði

Frávik Simms frá hefðbundinn aðferðafræði eru einkum þessi:

- Enginn munur er gerður á innri og ytri breytum
- Engar núlltakmarkanir eru settar á breytur
- Engin formleg hagfræði notuð við uppbyggingu líkana

Þessar forsendur fela það í sér að ekki reynist nauðsynlegt að kenna jöfnur, því "allt orsakar allt". Engar hagfræðikenningar þurfa að liggja að baki líkanasmíðinni, aðeins hagfræðilegar forsendur varðandi val á breytum.

Almennt ótakmarkað VAR líkan má rita:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{k} A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t \tag{9.1}$$

þar sem Z_t er vektor sem inniheldur breytur líkansins á hverjum tíma og A_i er fylki stikametla. Hægt er að fá óbjagaðan metil með því að keyra OLS á hverja breytu fyrir sig. Þó er að öllum líkindum hagkvæmara að keyra SUR þar sem að sammtíðarfylgni getur verið í afgangsliðnum.

Ef kanna á áhrif skella á eina stærð líkansins á framþróun allra stærða er nauðsynlegt að samtíðarfylgni sé ekki til staðar. Hægt er að útrýma henni með því að þátta fylki samvika með Choleski þáttun. Þegar þessi þáttun er

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

framkvæmd skiptir máli hvernig breytunum er raðað. Röð breytanna er yfirleitt látin vera þannig að hún uppfylli kenningar sem lýsa því hvernig hagkerfið virkar. Dæmi um útrýmingu sjálffylgni fyrir VAR(2):

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

þar sem að $E(\varepsilon_{1t}) = E(\varepsilon_{2t}) = 0$, $E\left(\varepsilon_{1t}^2\right) = \sigma_{11}$, $E\left(\varepsilon_{2t}^2\right) = \sigma_{22}$ og $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$. Hægt er fjarlæga samtíðarfylgni úr líkaninu með því að margfalda efri jöfnuna með σ_{12}/σ_{11}.

9.2 Röðun á breytum - Granger Causality

Nauðsynlegt er að raða breytum upp í líkan þannig að rétt orsakasamhengi sé á milli þeirra. Þetta er gert annað hvort með því að nota hagfræðilegt insæi eða með því að prófa orsakasambönd tölfræðilega.

Granger skilgreiningin á orsakasambandi er eftirfarandi: x er orsök y ef hægt er að spá fyrir, með meiri nákvæmni, um gildi núverandi y með því að nota söguleg gögn x heldur en ekki.

- **Granger orsakasamband með einni töf**

  Ef $MSE(y_t|U_{t-1}) < MSE(y_t|U_{t-1}\backslash X_{t-1})$ þá $x \rightarrow y$

- **Granger orsakasamband án tafar**

Ef $MSE(y_t|U_t\backslash y_t) < MSE(y_t|U_t\backslash X_{t-1}, y_t)$ þá $x \Rightarrow y$

Sargent kom fram með aðferð til þess að meta orsakasambönd. Gerum ráð fyrir eftirfarandi líkani:

$$y_t = A_0 D_t + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t \tag{9.2}$$

þar sem $A_0 D_t$ stendur fyrir ákveðna leitni. Ef $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ þá samkvæmt skilgreiningunni orsakar x ekki y.

- Regressum y_t á leitnihlutann og tafðar stærðir y
- Reikna út fylki afgangsliða u_t^*
- Regressa u_t^* á allar stærðir upprunalegu jöfnunar (þ.e. bæði trend, y og x)
- Reikna R^2
- Prófa núll kenninguna með Lagrange multiplier

Athuga ber þó að þetta próf er ekki marktækt nema að breyturnar séu sístæðar.

9.3 Almennt spálíkan

Almennt spálíkan má setja fram þannig að:

$$Z_{T+j-i}^f = \begin{cases} Z_{T+j-i}^f & \text{fyrir } j > i \\ Z_{T+j-i} & \text{fyrir } j < i \end{cases}$$

Gert er ráð fyrir því að sammtímafylgni sé engin.

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)

9.4 Fjöldi taflengda

Ákveðið vandamál skapast þegar fjöldi taflengda er ákveðinn. Oft byggja slíkar ákvarðanir á einkennum gagnana (s.s. 4 fyrir ársfjórðungsgögn) eða á því hvenær líkanið verður laust við sjálffylgni. Einnig er hægt að meta besta fjölda taflengda með tölfræðilegum hætti:

Akaike

Lágmörkum:

$$AIC = \left(-2\ln L + 2K\right)/T$$

þar sem $\ln L$ er gildi log likelyhood fallsins. Við höfum ekki þetta gildi en vitum að það er í hlutfalli við $|\varepsilon|$.

Schwarts criteria

Lágmörkum:

$$SC = \ln|\varepsilon| + k\ln T/T$$

9.5 Cointergration - aðferð Johansson

© Sigurgeir Örn Jónsson (ziggy@kaupthing.net)