Fjármál V

Sigurgeir Örn Jónsson

Vor 1997

Efnisyfirlit

Kafli 1

Vextir

1.1 Skilgreining

Vextir eru sú leiga sem greidd er af peningum. Vextir geta verið fastir/breytilegir og verðtryggðir/óverðtryggðir. Einnig er talað um:

- Flata vexti (*e. simple interest rate*)
- Vaxtavexti (*e. compounded interest rate)*
- Veldisvexti (e. *continuisly compounded interest rate*)

1.1.1 Flatir vextir

Þegar talað er um flata vexti er átt við að vextir séu eingöngu reiknaðir á höfuðstól. Vaxtagreiðslan er þá gefin með jöfnunni:

$$\text{Vextir} = H \cdot v \cdot t \tag{1.1}$$

þar sem H = höfuðstóll, v = vaxtaprósenta og t = tímalengd. Vaninn er sá að skuldabref beri flata vexti nema annars sé getið. ATH: Gæta ber þess að tíminn og vextirnir séu mældir á sama hátt, þ.e. ef vextir eru gefnir upp á p.a. grunni þarf tíminn að vera mældur í árum o.s.frv. (Dæmi í glósum)

1.1.2 Vaxtavextir

Þegar vextir reiknast bæði á höfuðstól og vexti er talað um vaxtavexti sem reiknaðir eru samkvæmt eftirfarandi jöfnu:

$$H_t = H_0 \left(1 + r_t\right)^t \tag{1.2}$$

þar sem H_t er höfuðstíll hvers tímabil og r vextir. Vaxtavextir eru yfirleitt reiknaðir m.v. ár. Ef vaxtatímabilið er hins vegar skemra (lengra) breytist formúlan og verður:

$$H_t = H_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot t} \tag{1.3}$$

þar sem m = fjöldi vaxtatímabila á ári, r = vaxtafótuinn gefinn upp sem p.a. stærð og t = tímalengd mæld í árum.

Flest skuldabréf í USA bera semi-annual vexti, t.d. ríkisskuldabréf sem bera 6 1/8% vexti sem greiðast 2-svar á ári. Þetta þýðir að vaxtagreiðslan er:

$$100.000 \cdot \left(1 + \frac{6.125}{2}\right)^{2 \cdot 1/2} = 30.64 \tag{1.4}$$

Eftir því sem að fjöldi vaxtatímabila á ári eykst, minnkar lengd hvers og eins. Þegar fjöldi vaxtargreiðslna á tímabili stefnir á óendanlegt er um samfelldan vaxtaútreikning (veldisvexti) að ræða:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = e^{rt} \tag{1.5}$$

1.1.3 Forvextir og nafnávöxtun

Skilgreinum eftirfarandi:

$$\begin{aligned} K &= \text{kaupverð víxils} \\ N &= \text{nafnverð} \\ d &= \text{líftími í dögum} \\ f &= \text{forvaxtaprósenta á p.a. basis} \end{aligned}$$

Forvextir eru gefnir sem:

$$\text{Forvextir} \equiv f \cdot \frac{d}{360} \cdot N \tag{1.6}$$

Kaupverð fæst því samkv formúlunni:

$$K = N \Leftrightarrow f \cdot \frac{d}{360} \cdot N \ = N \left(1 \Leftrightarrow f \frac{d}{360}\right) \tag{1.7}$$

Ávöxtunin er:

$$K\,(1 + R)^{d/360} = N \tag{1.8}$$

eða

$$\frac{K}{N} = \frac{1}{(1 + R)^{d/360}} = \left(1 \Leftrightarrow f \cdot \frac{d}{360}\right) \tag{1.9}$$

samkvæmt jöfnu (1.7). Ef ávöxtun er þekkt, en forvextir ekki má finna hana með eftirfarandi jöfnu:

$$F = \frac{360}{d}\left[1 \Leftrightarrow (1 + r)^{-\frac{d}{360}}\right] \tag{1.10}$$

Einnig má finna ávöxtunina, séu forvextir þekktir, með;

$$\begin{aligned} R &= \exp\left[\Leftrightarrow \frac{360}{d} \ln\left(1 \Leftrightarrow f \frac{d}{360}\right)\right] \\ &= \left(1 \Leftrightarrow f \frac{d}{360}\right)^{-\frac{360}{d}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2 Greiðsluflæði skuldabréfa

Algengt er að greiðsluflæði séu almennt sett fram á tímaás þar sem að píla upp úr tímaásnum stendur fyrir innborgun (greiðsla til eigenda kröfu) en píla niður útborgun. Í venjulegum skuldabréfum er það einungis fyrsta grieðslan, y_0, sem er útborguð við veitingu láns eða kaup á skuldabréfi, en aðrar greiðslur falla kaupandanum í skaut. Vaninn er einnig að greiðslurnar falli með reglulegu millibili, t.d. árlega eða ársfjórðungslega.

Við sundurgreinum hverja greiðslu í annars vegar afborgun af höfuðstól og hins vegar vaxtagreiðslu. Mismunandi gerðir skuldabréfa eru skilgreinar með því hvernig afborgunum og vaxtagreiðslum er dreift á lánstímann.Við munum, til að byrja með, láta nægja að skoða skuldabréf með föstum vöxtum.

Skilgreinum eftirfarandi stærðir:

$$\begin{array}{rcl} Rb_0 & : & \text{Höfuðstóll} \\ Rb_j & : & \text{Eftirstöðvar eftir greiðslu nr. j} \\ y_j & : & \text{Greiðsla nr } j \\ R & : & \text{Nafnvextir bréfsins} \end{array}$$

Við fáum:

$$Rb_j = (1+R)\,Rb_{j-1} \Leftrightarrow y_j \tag{1.12}$$

Ef $y_j = 0$ fyrir $j = 1, 2, .., n$ þá mun upprunalegur höfuðstóll Rb_0 vaxa samkvæmt:

$$Rb_t = Rb_0\,(1+R)^t \tag{1.13}$$

þegar vaxtavextir eru notaðir. Lausn diffurjöfnunnar (1.12) fyrir einhverja greiðsluröð $(y_t)_{t=0,1,..,n}$ er gefin með:

$$Rb_t = (1+R)^t\,Rb_0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} (1+R)^{t-j}\,y_j \tag{1.14}$$

$(1+R)^t \cdot Rb_0$ er höfuðstóllinn framreiknaður til tíma t en síðari liður jöfnu (1.14) er framreiknað verðmæti greiðslna. Það getur verið erfitt að reikna síðari liðinn út, en við munum í því sem á eftir fer, útleiða jöfnur fyrir greiðsluraðir algengustu forma skuldabréfa.

Áður en að því kemur bendum við á að það eru 5 breytistærðir í jöfnu (1.14). Ef við þekkjum 4 af þessum 5 breytum getum við leyst vandamálið fyrir þá síðustu. Dæmi: Fyrir gefna greiðsluröð, höfuðstól og lánstíma getum við fundið þá vaxtaprósentu sem leysir jöfnu (1.14).

Ef við látum Y_n vera síðustu greiðslu, þ.e. $Rb_n = 0$ má fyrir gefna vexti R og greiðsluröð $(Y_0, Y_1, ..Y_n)$ finna núvirði greiðsluraðarinnar sem:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+R)^n\,Rb_0 \Leftrightarrow \sum_j y_j\,(1+R)^{n-j} \\ &\Rightarrow (1+R)^n\,Rb_0 = \sum_j y_j\,(1+R)^{n-j} \\ &\Rightarrow Rb_0 = \frac{\sum_j Y_j\,(1+R)^{n-j}}{(1+R)^n} = \sum_j Y_j\,(1+R)^{-j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Rb_0 = \frac{\sum_j Y_j}{(1+R)^j} \tag{1.15}$$

Við getum einnig leyst út tíma fyrir lán með þekktan höfuðstól, vexti og greiðsluröð. Lokdagur er sá tími þar sem að $Rb_t = 0$ í fyrsta sinn (þ.e. min $t \in T$ þ.a. $Rb_t = 0$). Og að lokum getum við fyrir gefna greiðsluröð, höfuðstól og lánstíma fundið þá vaxtaprósentu sem leysir jöfnu (1.15). Það krefst stundum flóknari aðferða.

Kafli 2

Algengustu skuldabréfaform

2.1 Jafngreiðslulán (annuitet)

Jafngreiðslubréf einkennast af því að þar eru allar greiðslur jafnar. Þegar skoðuð er skipting vaxta og afborgana sést að hluti afborgana fæst að hluti afborgana vex eftir því sem á lánstímann líður.

Þegar um lán með jöfnum afborgunum er að ræða eru það afborganirnar sem eru jafnar en vaxtagreiðslan minnkar eftir því sem líður á lánstímann.

2.1.1 Núvirði

Núvirði grieðslna þess háttar greiðsluflæðist fæst samkvæmt jöfnu (1.15):

$$RG_0 = \sum_{t=1}^{n} Y\,(1+R)^{-t} = Y \sum_{t=1}^{n} (1+R)^{-t} \tag{2.1}$$

Margföldum báðar hliðar með $(1+R)$:

$$\begin{aligned} RG_0\,(1+R) &= (1+R)\,Y \sum_{t=1}^{n} (1+R)^{-t} \\ &= Y \sum_{t=1}^{n} (1+R)^{-t+1} \\ &= Y \sum_{t=0}^{n-1} (1+R)^{-t} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Drögum fyrri jöfnu frá seinni:

$$\begin{aligned} RG_0\,(1+R) \Leftrightarrow RG_0 &= Y \sum_{t=0}^{n-1} (1+R)^{-t} \Leftrightarrow Y \sum_{t=1}^{n} (1+R)^{-t} \\ R \cdot RG_0 &= Y \left(1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}\right) \\ RG_0 &= Y \left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}}{R}\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.2 Jafngreiðslufjárhæð

Algengt er við útgáfu jafngreiðslubréfa að þekktur stærðirnar séu höfuðstóll, vextir og lánstími. Finna má jafngreiðsluupphæðina með:

$$Y = RG_0 \left[\frac{R}{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}} \right] \tag{2.4}$$

2.1.3 Lánstími

Ef jafngreiðsla er þekkt og dæmið er leyst fyrir lánstímann fæst:

$$\begin{aligned} 1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n} &= \frac{RG_0 \Leftrightarrow R}{Y} \\ (1+R)^{-n} &= \Leftrightarrow \frac{RG_0 \Leftrightarrow R}{y} + 1 \\ n &= \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1 \Leftrightarrow \frac{RG_0 - R}{y}\right)}{\ln(1+R)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.4 Eftirstöðvar

Eftirstöðvar jafngreiðsluláns á tíma j er:

$$\begin{aligned} RG_j &= (1+r)^j RG_0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{j} (1+R)^{j-t} \cdot y \\ &= y \left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-(n-j)}}{R} \right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

vegna þess að:

$$RG_0 = y \left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}}{R} \right] \tag{2.7}$$

2.1.5 Afborgun

Sérhver greiðsla Y skiptist í vexti of afborganir. Sú vaxtagreiðsla sem greidd er í hvert sinn svarar til þeirra vaxta sem eftirstöðvar lánsins gefa tilefni til, þ.e. vaxtagreiðsla j er $R \cdot RG_{j-1}$. Þar af leiðir að afborgun höfuðstóls við j-tu greiðslu er:

$$\mathrm{AFB}_j = Z_j = Y \Leftrightarrow R \cdot RG_{j-1} \tag{2.8}$$

Ef við setjum inn fyrir RG_{j-1} fáum við:

$$Z_j = Z_1 (1+R)^{j-1} \tag{2.9}$$

þar sem að:

$$Z_1 = Y \Leftrightarrow R \cdot RG_0 \tag{2.10}$$

2.1.6 Ávöxtunarkrafa önnur en nafnvextir

Séu aðstæður þannig á markaði að fjárfestar krefjist annarar ávöxtunar en nafnvextir bréfsins gefa tilefni til þarf að núvirða greiðsluflæðið m.v. þá ávöxtunarkröfu sem sett er fram. Það núvirði sem þannig fæst er frábrugðið höfuðstól bréfsins en hlutfallið þarna á milli er gjarnan nefnt gengi skuldabréfsins.

Við höfum að greiðsluflæði jafngreiðslubréfs ræðst af nafnvirði, nafnvöxtum og fjölda greiðslna. Látum $RG_0 = 1$. Verð jafngreiðslubréfs með ávöxtunarkröfuna r er því gefið sem:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=i}^{n} \frac{Y}{(1+r)^i} \\ &= Y \sum_{i=1}^{n} (1+r)^{-i} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vitum að:

$$V = Y(1+r)^{-1} + Y(1+r)^{-2} + ... + Y(1+r)^{-n}$$

Drögum jöfnu (2.11) frá $(1+r)V$:

$$\begin{aligned} (1+r)V \Leftrightarrow V &= Y \Leftrightarrow Y(1+r)^n \\ V &= Y\frac{1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}}{r} \end{aligned} \tag{2.12}$$

En hver er greiðsla Y? Vitum að fyrir höfuðstól einn þá verður eftirfarandi að gilda:

$$\begin{aligned} 1 &= Y\frac{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}}{R} \\ Y &= \frac{R}{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

þar sem að R eru nafnvextir bréfsins. Stingum þessu inn og fáum:

$$V = \frac{R}{r}\left(\frac{1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}}{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}}\right) \tag{2.14}$$

fyrir höfuðstól sem er 1.

Dæmi: Annuitet með árlegum greiðslum til 3ja ára, nafnvextir eru 9% og ávöxtunarkrafa er 9.5%:

t	Greiðsla	Afb.	Vxt.	Eftirst.
0				1
1	0.395	0.305	$R \Leftrightarrow RG_0 = 0.09$	0.695
2	0.395	0.333	$R \Leftrightarrow RG_1 = 0.063$	0.362
3	0.3950	0.362	0.033	0

$$\begin{aligned} Y &= \frac{R}{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}} = \frac{0.09}{1 \Leftrightarrow (1+0.09)^{-3}} = 0.395 \\ Z_1 &= Y \Leftrightarrow R \cdot RG_0 = y(1+R)^{-n} = 0.395 \cdot 1.09^{-3} = 0.305 \\ V &= \frac{R}{r}\left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}}{1 \Leftrightarrow (1+R)^{-n}}\right] = \frac{0.09}{0.095}\left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+0.09)^{-3}}{1 \Leftrightarrow (1+0.095)^{-3}}\right] = 0.9912 \end{aligned}$$

1 króna að nafnvirði selst því á 99.12 aura.

2.2 Vaxtagreiðslulán

Eins og áður hefur komið fram er vaxtagreiðslulán þannig að á öllum gjalddögum fram að lokagjalddaga greiðast eingöngu vextir, en þá endurgreiðist höfuðstóll í heilu lagi auk vaxta. Verð vaxtagreiðslubréfs m.v. ávöxtunarkröfu r (nafnvirði 1) fæst því:

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R}{(1+r)^i} + \frac{1+R}{(1+r)^n} \\
&= R\left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+r)^{-(n-1)}}{r}\right] + (1+R)\,(1+r)^{-n} \\
&= \frac{R}{r} + \frac{r \Leftrightarrow R}{r\,(1+r)^n}
\end{aligned}
$$

Greiðsluflæðið byggir á árlegum vaxtagreiðslum að viðbættri greiðslu höfuðstóls á síðasta tímabili.

2.3 Jafnar afborganir

Skuldabréf með jöfnum afborgunum byggja, eins og nafnið gefur til kynna, á því á hverju tímabili sé greidd sama jafna afborgunin að viðbættum vöxtum. Afborgun hvers tímabils er:

$$A = \frac{1}{N} \tag{2.15}$$

og eru eftirstöðvar því:

$$E = 1 \Leftrightarrow \frac{j}{n} \tag{2.16}$$

en vaxtagreiðsla hvers tímabils er:

$$I = R\left(1 \Leftrightarrow \frac{j \Leftrightarrow 1}{n}\right) \tag{2.17}$$

Við sjáum þvi að hver greiðsla er:

$$y_j = \frac{1}{n} + R\left(1 \Leftrightarrow \frac{j \Leftrightarrow 1}{n}\right) \tag{2.18}$$

þá fæst að verðið á skuldabréfi með föstum afborgunum m.v. ávöxtunarkröfu r er:

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{n} \frac{Y_j}{(1+r)} = \sum_{t} \frac{1/n + R\left(1 \Leftrightarrow \frac{t-1}{n}\right)}{(1+r)^t} \\
&= \frac{R}{r} + \left[\frac{1 \Leftrightarrow R/r}{n}\right] \cdot \left[\frac{1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}}{r}\right]
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

(dæmi í glósum)

2.4 Skuldabréfaflóra íslenska markaðarins

Íslenski skuldabréfamarkaðurinn er eftirfarandi:

Ríkistryggð skuldabréf	
- SPRIK	73 m
- Húsbréf	90 m
- Ríkisvíxlar + bréf	30 m
Bankar og sparisjóðir	30 m
Önnur skuldabréf	50 m
- (sveitarfélög, ft, lánasj)	
SAMTALS	c.a. 260m

Kafli 3

Meðaltími

3.1 Skilgreining

Almennt má segja að eigandi skuldabréfs standi frammi fyrir tvenns konar áhættu:

- Verðbreytingar
- Endurfjárfesting greiðslna

Til er áhættumælir sem að vissum forsendum gefnum upphefur þessar áhættur. Þegar ávöxtunarkrafa breytist þá breytist verð skuldabréfs samkv:

$$\Delta P = \frac{dP}{d\,(1+r)} = \frac{dp}{dr} \tag{3.1}$$

Algeng vaxanæmnisstærð kallast meðaltími (*e. duration) og er reiknuð sem nokkurs konar teygni, þ.e.a.s.:*

$$\begin{aligned} D &= \frac{dP/P}{d\,(1+r)\,/\,(1+r)} \\ &= \frac{dP}{d\,(1+r)} \cdot \frac{(1+r)}{P} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Við höfum að:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\,(1+r)} &= \frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(1+r)^i}\right)}{d\,(1+r)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \Leftrightarrow i \cdot y_i}{(1+r)^{i+1}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Meðaltími er því:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(1+r)}{P} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\Leftrightarrow i y_i}{(1+r)^{i+1}} \\ &= \frac{\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot y_i}{(1+r)^i}}{P} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Einnig má setja meðaltíma fram fyrir greiðsluflæði sem ekki fylgir hefðbundnu formi:

$$D = \frac{\sum_t \frac{t \cdot Y_t}{(1+r)^t}}{P} \tag{3.5}$$

Hægt er að leiða út meðaltíma fyrir hinar ýmsu gerðir skuldabréfa:

$$\begin{aligned}
D_{\text{JAFNAFB}} &= \frac{1+r}{r}\left[1 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{R}{r}\right)\left(1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}\right) + n\,(r \Leftrightarrow R)\,(1+r)^{-(n+1)}}{n \cdot R + \left(1 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)\right) \cdot \left(1 \Leftrightarrow (1+r)^{-n}\right)}\right] \\
D_{\text{VXGR}} &= \frac{1+r}{r} \Leftrightarrow \frac{(1+r) \Leftrightarrow n\,(r \Leftrightarrow R)}{R\,(1+r)^n + (r \Leftrightarrow R)} \\
D_{\text{ANNU}} &= \frac{1+r}{r} \Leftrightarrow \frac{n}{(1+r)^n \Leftrightarrow 1} \\
D_{\text{EING}} &= \frac{\frac{n-1}{(1+r)^n}}{\frac{1}{(1+r)^n}} = n
\end{aligned}$$

(Dæmi í glósum)

3.2 Fyrstu gráðu nálgun á verðbreytingum

Við getum sett fram fyrstu gráðu verðbreytingaráhrif sem:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr} \cdot \Delta r \tag{3.6}$$

þar sem að dP/dr er hallatala snertils í (P, r) planinu. Við vitum að meðaltími er skilgreindur sem:

$$D = \frac{dP/dr}{P/r} \tag{3.7}$$

Deilum með P/r báðum megin í ΔP:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta P}{P/r} &= \frac{dP}{dr} \Big/ \frac{P}{r} \cdot \Delta r \\
\frac{\Delta P}{P} &= \frac{D}{r} \cdot \Delta r
\end{aligned} \tag{3.8}$$

þ.s. D/r er sérstök kennitala er kallast leiðréttur meðaltími (*e. modified duration).* Eins fæst:

$$\Delta P = MD \cdot P \cdot \Delta r \tag{3.9}$$

þar sem að $MD \cdot P$ er kallað krónumeðaltími (*e. dollar-duration)* þar sem hrein verðbreyting kemur fram.

Kafli 4

Verðlagning skuldabréfa

Verðlagning skuldabréfa er vandmeðfarið mál, ekki síst vegna þess að til eru skilyrði sem verðbreyting skuldabréfa þurfa að uppfylla, innbyrðis óháð öllum ytri aðstæðum. Ástæða þessa er sú að greiðsluflæði einstakra bréfa má ná fram með réttri samsetningu annarra skuldabréfa og verður verð samsetningarinnar að vera jafnt verði bréfsins sem endurframkallað er.

Þetta er afleiðing þess sem kallað er "lögmáliðum eitt verð", þ.e. tvö skudabréf sem gefa tilefni til sama greiðsluflæðis verða að hafa sama verð svo ekki fyrirfinnist svokallaðir högnunarmöguleikar (*e. arbitrage)* á markaðnum.

Með höfnun er átt við að fjárfestar geti með kaupum og sölum í skuldabréfum búið til greiðsluflæði sem einungis inniheldur stærðir sem eru stærri eða jafnar núlli. EF slíkt er til staðar þá hrynur markaðurinn (hmmm)

Hornsteinninn í byggingunii er svokallað einsgreiðslubréf, en það er skuldabréf sem greiðir eiganda sínum á ákveðnum degi í framtíðinni 1 kr. Með slíkum bréfum má líkja eftir greiðsluflæði hvers skuldabréfs sem er. Sem dæmi má hugsa sér jafngreiðslulán sem greiðir 100 kr á ári í 10 ár. Berum það saman við skuldabréf í körfu (safn) sem í eru 1000 eingreiðslubréf. 100 þeirra lifa í eitt ár og greiða eiganda 1. kr hver. Önnur 100 í 2 ár o.s.frv.

Þegar ný bréf koma inn á markaðinn þá þarf að vita hver eingreiðslubréf eru til þess að verðleggja nýju bréfin. Afleiðing þess sem áður var sagt er sú að hafi markaðurinn verðlagt eingreiðslubréf sem falla í gjalddaga á öllum mögulegum tímapunktum í framtíðinni þá hefur markaðurinn ófrávíkjanlega verðlagt öll önnur skuldabréf sem þar finnast.

Sýna má fram á að ekki finnist högnunarmöguleikar á markaðnum ef eftirfarandi jafna er uppfyllt fyrir öll skuldabréf:

$$P = y_1 d_1 + y_2 d_2 + ... + y_N d_N \tag{4.1}$$

þar sem y_i er greiðsla nr i sem skuldabréfið gefur tilefni til og d_i er verðið í dag á einni krónu greiddri á tíma i. Þetta þýðir að ef allar grieðslur sem falla á sama tímapunkti eru núvirtar með sama afvöxtunarþætti (d_i) óháð því hvers eðlis bréfið sem gefur tilefni tilþeirra er, mun ekki vera högnun á markaðnum.

Hægri hlið jöfnu (4.1) köllum við fræðilegt verð skuldabréfs. Oft er talað um eingreiðsluvexti í stað afvöxtunarþátta[1], þ.e.:

$$d_t = (1+R_t)^{-t} = \frac{1}{(1+R_t)^t} \tag{4.2}$$

þar sem að R_t er ávöxtun skuldabréfs sem ber einungis eina greiðslu og fellur hún á tíma t. Jöfnu (4.1) má því endurrita:

$$\begin{aligned} P &= y_t \cdot (1+R_1)^{-1} + y_2 \cdot (1+R_2)^{-2} .... + y_N \cdot (1+R_N)^{-N} \\ &= \sum_{i=1}^{N} y_i (1+R_i)^{-i} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Við tökum eftir því að þetta líkist mjög því þegar verð skuldabréfa er reiknað út frá fastri ávöxtunarkröfu. Þó er sá munur á að hér eru vextir breytilegir í tíma. Vissulega fer því víðs fjarri að til séu eingreiðslubréf sem renna út á öllum mögulegum tímum í framtíðinni.

Á venjulegum skuldabréfamörkuðum eru flest bréfin með greiðslur á mörgum mismunandi tímapunktum, en þó er hugsanlegt að leysa jöfnu (4.1) fyrir afvöxtunarþættina ef nægjanlega mörg bréf finnast, þ.e. fjöldi bréfa $\geq N$.

(Dæmi í glósum)

Dæmið segir okkur tvennt:

- Ávöxtunarkrafa sem slík er ófullnægjanedi mælikvarði á það hvort einn fjárfestingarkostur er öðrum betri þegar greiðsluflæðið er mismunandi.
- Verðlagning skuldabréfa er samstætt en ekki sérstætt vandamál í þeim skilningi að einstök skuldabréf þarf að verðleggja í samræmi við markaðinn í heild.

Við setjum fram Minkowski-Farkas-Weyl lemmuna:

Fyrir sérhvert fylki G og vektor P gildir annað hvort

- Jöfnuhneppið $G \cdot d = P$ hefur ekki neikvæða lausn d
- Ójöfnuhneppið $G \cdot X \geq 0$ og $P \cdot X < 0$ hefur lausn X.

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & & g_{1T} \\ g_{21} & g_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{T1} & & & g_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_T \end{bmatrix} \\ \iff & \quad P_1 = \sum_{t=1}^{T} g_{1t} \cdot d_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{g_{1t}}{(1+r_t)^t} \end{aligned}$$

Ath: X_i táknar vægi skuldabréfs nr i í safninu X.

DÆMI Í GLÓSUM

[1] Auðvelt er að reikna eingreiðsluvextina út frá afvöxtunarliðnum: $r_t = d_t^{-1/t} - 1$

Kafli 5

Forward vextir

5.1 Skilgreining

Samband vaxta og tíma köllum við vaxtaferil (term structure $\Longleftrightarrow$ tímaróf vaxta). Ferillinn er gjarnan settur upp í planinu $(y(t,T), T)$ þar sem $y(t,T)$ táknar ávöxtunarkröfu eingreiðslubréfs á tíma t með endurgreiðslu 1 kr á tíma T. Verð þessa eingreiðslubréfs er gefið sem:

$$P(t,T) = [1 + y(t,T)]^{t-T} \tag{5.1}$$

Einnig má leysa út fyrir ávöxtunarkröfunni:

$$y(t,T) = P(t,T)^{1/(t-T)} \Leftrightarrow 1$$

Við köllum r_t augnabliksvextina, þ.e. sú áhættulausa ávöxtun sem í boði er yfir næstu tímaeiningu og $R_t = 1 + r_t$. Innbyggðir (fógnir) í vaxtaferlinum eru hinir svokölluðu forward-vextir. Yfirleitt er rætt um eins-tímabils forward-vexti sem bundnir eru í vaxtaferli á tilteknum tíma t. Látum $f(t,T)$ tákna slíka forward vexti sem fólgnir eru í ferlinum frá tíma T til tíma $T+1$.

5.1.1 Dæmi:

G.r.f. að:

$$\begin{aligned} P(0,1) &= 0,909 \Leftrightarrow y(\cdot,1) = 10\% \\ P(0,2) &= 0,8325 \Leftrightarrow y(\cdot,2) = 9,6\% \end{aligned}$$

Spurningin er þessi: Hugsum okkur aðila sem vill fjárfesta til 2ja ára. Hvort bréfið á hann að kaupa og við hvaða endurfjárfestingarstig? Er hann jafn vel settur?

Leysum eftirfarandi:

$$\begin{aligned} (1+10\%) \cdot (1 + f(0,1)) &= 1.096^2 \\ f(0,1) &= 9.2\% \end{aligned}$$

þ.e.a.s. leysum út þá forward vexti sem hljóta að gilda, séu bréfin jafngild og skuldabréfamarkaður skilvirkur.

(2 dæmi í glósum)
Almennt fæst eftirfarandi:

$$f\left(t,T\right)=\frac{P\left(t,T\right)}{P\left(t,T+1\right)}\Leftrightarrow 1 \tag{5.2}$$

og

$$F\left(t,t\right)=y\left(t,t+1\right)=r_t=R_t\Leftrightarrow 1$$

(Dæmi í glósum)
Höfum út frá jöfnu (5.2):

$$\begin{aligned}P\left(t,t+2\right) &= \frac{P\left(t,t\right)}{1+f\left(t,t\right)}=\frac{1}{1+r_t}\\ p\left(t,t+2\right) &= \frac{p\left(t,t+1\right)}{1+f\left(t,t+1\right)}\end{aligned}$$

Almennt fæst:

$$P\left(t,T\right)=\frac{1}{\left(1+r_t\right)\left(1+f\left(t,t+1\right)\right)\left(1+f\left(t,t+2\right)\right)\cdots\left(1+f\left(t,T\Leftrightarrow 1\right)\right)} \tag{5.3}$$

5.1.2 Ingersoll

Höfum eftirfarandi jöfnur:

$$P\left(t,T\right) = \left[1+y\left(t,T\right)\right]^{t-T} \tag{5.4}$$

$$f\left(t,T\right) = \frac{P\left(t,T\right)}{P\left(t,T+1\right)}\Leftrightarrow 1 \tag{5.5}$$

$$f\left(t,t\right) = y\left(t,t+1\right)=r_t=R_t\Leftrightarrow 1 \tag{5.6}$$

$$P\left(t,T\right) = \frac{1}{\left(1+r_t\right)\left(1+f\left(t,t+1\right)\right)\left(1+f\left(t,t+2\right)\right)\cdots\left(1+f\left(t,T\Leftrightarrow 1\right)\right)} \tag{5.7}$$

Þegar fullkomin vissa ríkir um framtíðarþróun er það skilyrði þess að ekki finnist höfnun að:

$$r_t=f\left(t,T\right) \tag{5.8}$$

(Dæmi í glósum)
Með því að nota jöfnu (5.8) og jöfnu (5.5) fæst:

$$\begin{aligned}r_t &= f\left(t,t\right)=\frac{P\left(t,t\right)}{P\left(t,t+1\right)}\Leftrightarrow 1\\ 1+r_t &= T_t=\frac{1}{P\left(t,t+1\right)}\\ \frac{P\left(t,t+1\right)}{P\left(t,t+2\right)}\Leftrightarrow 1 &= f\left(t,t+1\right)=r_{t+1}\\ \frac{1}{P\left(t,t+2\right)} &= \frac{\left(1+r_{t+1}\right)}{P\left(t,t+1\right)}=R_tR_{t+1}\\ \frac{1}{P\left(t,T\right)} &= R_t\cdot R_{t+1}\cdots R_{T-1} \qquad (5.9)\end{aligned}$$

þ.e. hin gefna ávöxtun sönn fæst með því að kaupa eingreiðslubréf með gjalddaga T. Þetta má einnig fá fram með því að velta áfram eins tímabils vöxtum.

Ef við tökum útgangspunkt í ávöxtunarkröfunni $y(.)$ í stað verðsins $P(.)$ fæst:

$$1 + y(t,T) = (R_t \cdot R_{t+1} \cdots R_{T-1})^{\frac{1}{T-t}} \tag{5.10}$$

Og að lokum fæst einnig frá jöfnu (5.9) að ávöxtun sérhvers skuldabréfs yfir einstakt tímabil er:

$$\frac{P(t+1,T)}{P(t,T)} = R_t \tag{5.11}$$

Þó svo að jöfnur virðast einfaldar endurritanir af hvorri annarri þá eru mismunandi form þeirra afar mikilvægt þegar líkanið er gert flóknara og framtíðarvextir eru ekki þekktir.

5.2 Vaxtaþróunartilgátur

5.2.1 Unbiased expectations hypothesis

Ein elsta tilgáta um þróun vaxta nefnist væntingartilgátan (*e. the expectations hypothesis*). Við munum sjá að ekki er um að ræða einstaka tilgátu heldur mengi af sundurlægum tilgátum. Ef jafna (5.2) er notuð sem hornsteinn væntinga fæst "unbiased expectatiosn hypothesis", þ.e.:

$$E_t[\tilde{r}_T] = f(t,T) \tag{5.12}$$

Með því að nota jöfnu (**??**) fæst að verð eingreiðslubréfs á tíma t með gjalddaga T er gefið sem:

$$P(t,T) = \frac{1}{R_t \cdot E\left(\tilde{R}_{t+1}\right) \cdot E\left(\tilde{R}_{t+2}\right) \cdots E\left(\tilde{R}_{T-1}\right)} \tag{5.13}$$

5.2.2 Return to maturity

Hin svokallaða "Return to maturity" tilgáta er byggð á jöfnu (5.9). Samkvæmt henni er ávöxtunarkrafa eingreiðslubréfs yfir lánstímann gefin með:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(t,T)} &= E\left[R_t \cdot \tilde{R}_{t+1} \cdots \tilde{R}_{T-1}\right] \\ P &= \frac{1}{R_t \cdot E\left[\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{R}_{t+2} \cdots \tilde{R}_{T-1}\right]} && (5.14) \\ P &= \left(E\left[x^{-1}\right]\right)^{-1} && (5.15) \end{aligned}$$

Með því að bera saman jöfnu (5.13) og (5.14) sjáum við að þær tvær tilgátur sem settar hafa verið fram eru ósamstæðar nema þá aðeins að allir framtíðarvextir séu innbyrðis óháðir, þ.e.

$$E[\tilde{x} \cdot \tilde{y}] = E[\tilde{x}] \cdot E[\tilde{y}] \tag{5.16}$$

Til þess að skoða síðari tvö tilfellin setjum við fram breytuna:

$$X = \left(R_t \cdot \tilde{R}_{t+1} \cdots \tilde{R}_{T-1}\right) \tag{5.17}$$

5.2.3 Yield to Maturity

Tilgáta þessi byggir á jöfnu (5.10). Við fáum:

$$
\begin{aligned}
1 + y(t,T) &= E\left[x^{-\frac{1}{T-t}}\right] \\
&= P(t,T)^{\frac{1}{t-T}} \\
P(t,T) &= \left(E\left[x^{\frac{1}{T-t}}\right]\right)^{t-T}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

5.2.4 Staðbundnar væntingar

Tilgáta þessi byggir á jöfnu (5.11), þ.e.:

$$
\begin{aligned}
R_t &= E\left(\frac{P(t+1,t)}{P(t,T)}\right) \\
P(t,T) &= \frac{E(P(t+1,T))}{R_t} \\
&= \frac{E\left[\frac{P(t+2,T)}{R_{t+1}}\right]}{R_t} = \cdots = \frac{E\left[\frac{1}{R_{t+1}R_{t+2}\cdots R_{T-1}}\right]}{R_t} \\
&= E\left[\frac{1}{R_t R_{t+1}\cdots R_{T-1}}\right] \\
P(t,T) &= E(X)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

5.2.5 Ingerasoll

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= E(X) \\
X &= \frac{1}{R_1 \cdot \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2 \ldots . \cdot \tilde{R}_{T-1}}
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

5.2.6 Fabozzi

Við höfum að: $R_1, R_2, \ldots R_T$ eru eingreiðsluvextir dagsins í dag. Frá þeim fást eins-tímabils forward-vextirnir:

$$
1 + F_t = \frac{(1+R)^t}{(1+R_{t-1})^{t-1}} \tag{5.21}
$$

Við getum túlkað Forward vextina sem þá jaðaraukningu ávöxtunar sem í boði er fyrir viðbótarfjárfestingu um eitt tímabil. Samkvæmt skilgreiningu er $R_t = F_t$. Jöfnu (5.21) má einnig setja fram sem:

$$
(1+R_t)^t = (1+F_1)(1+F_2)\cdots(1+F_{t-1}) \tag{5.22}
$$

Við höfum því hagkvæmt samband milli eingreiðsluvaxta og forward-vaxta. Þess vegna eru báðir kostir mögulegir sem inntak í vaxtaþróunarlíkan.

Eingreiðsluvextirnir lýsa vöxtum frá núinu og yfir eitt eða fleiri tímabil fram að gefnum tímapunkti en forward-vextirnir lýsa vöxtum yfir einstök tímabil í framtíðinni.

Þriðji möguleikinn er að notast við afvöxtunarfallið (þ.e. verð eingreiðslubréfa):

$$D_t = \frac{1}{(1+R_t)^t} = \frac{1}{(1+F_1)(1+F_2)\cdots(1+F_{t-1})} \tag{5.23}$$

5.3 Innbyggðar vaxtavæntingar

Hvað nú ef við spyrjum um væntanlega vexi framtíðarinnar yfir tímabil sem ekki eru af lengdinni einn? Dæmi: Við þekkjum R_t og R_{t+s}. Hvaða væntingar má gera til vaxta á tíma t fram að tíma $t+s$?

Við leysum eftirfarandi jöfnu:

$$(1+R_t)^t (1+m_{t,s})^s = (1+R_{t+s})^{t+s} \tag{5.24}$$

Dæmi:
Í boði eru SPRIK til 5 ára m.v. 5% ávöxtunarkröfu og 10 ára SPRIK m.v. 6% ávöxtunarkröfu. Spurning: Hverjir eru 5 ára forward-vextir að 5 árum liðnum? Leysum:

$$\begin{aligned}(1+5\%)^5 (1+m_{5,5})^5 &= (1+6\%)^{10} \\ &\Rightarrow m_{5,10} = 7\%\end{aligned}$$

Sýna má fram á að:

$$(1+m_{t,s})^s = (1+F_{t+1})(1+F_{t+2})\cdots(1+F_{t+s}) \tag{5.25}$$

ATH: vextir á tíma t eru F_t samkv Fabozzi en F_{t-1} samkv Ingersoll $= F(0, t \Leftrightarrow 1)$.

5.4 Vaxtaþróunarlíkön

Gert er ráð fyrir því að óvissan stýrist af einni breytu og þá er gjarnan stuðst við skammtímavextina r_t. Slembiferli sem lýst gæti þróun skammtímavaxtanna er:

$$dr = b \cdot dt + \sigma dx \tag{5.26}$$

þar sem að:

dr	:	breyting í skammtímavöxtum
b	:	vænt stefna breytingarinnar
dt	:	lengd tímaeiningar
σ	:	staðalfrávik vaxtabreytinganna
dx	:	"Brownian Motion" eða Wiener ferli

Wiener ferli er sagt vera staðlað þegar breytan x er yfir sérhverja tímaeiningu normaldreifð með meðaltal = 0 og staðalfrávik = 1. Við sjáum að breytingar í skammtímavöxtum eru í beinu hlutfalli við breytingar í x með hlutfallsstuðli σ.

Gerum ráð fyrir því að breytingar skammtíamvaxta á gefnu tímabili séu óháðar breytingum yfir öll önnur tímabil. Við fáum:

$$
\begin{aligned}
E\left(dr\right) &= bdt && (5.27)\\
Var\left(dr\right) &= E\left[\left(dr \Leftrightarrow E\left(dr\right)\right)\right]^2 \\
&= E\left[\sigma^2\left(dx\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 dt && (5.28)
\end{aligned}
$$

Sérstakt tilfelli kemur fram þegar b og σ eru ekki lengur fastar heldur föll af ástandsbreytu og tíma, þ.e.

$$
\begin{aligned}
b &= b\left(r,t\right)\\
\sigma &= \sigma\left(r,t\right)
\end{aligned}
$$

Þá eru vongildi skammtímavaxtabreytinganna og staðalfrávik háð núverandi stöðu vaxtanna og tímanum. Í þessu tilviki er slembiferlið kalað ITO-ferli. Algengt er að sjá fallið $b\left(r,t\right)$ sett fram á svokölluðu "mean-reverting" formi, þ.e.

$$
b\left(r,t\right) = \alpha\left(F \Leftrightarrow r\right) \qquad (5.29)
$$

þ.e. F er einhvers konar langtímameðaltal.

Kafli 6

Afleiður

Með afleiðu er oftast átt við verðbréf sem er þannig úr garði gert að verð þess er leitt af verði annarra bréfa.

Einnig fyrirfinnast afleiður með grieðsluflæði sem tengt er stærðum sem að öllu jöfnu flokkast ekki undir hefðbundna fjármálafræði.

Helstu tegundir afleiðna eru:

- Framvirkir og staðlaðir framvirkir samningar (*e. forward and futures*)
- Vilnanir (*e. options*)
- Skiptasamningar (*e. swaps*)

6.1 Framvirkir samningar

Með framvirkum samningi er átt við samkomulag sem gert er núna um viðskipti sem munu eiga sér stað á ákveðnum tíma í framtíðinni.

Sá aðilinn sem kaupir er sagður hafa tekið gnótt stöðu (*e. long position*) en sá sem selur er í skortstöðu (*e. short position*). Að sjálfsögðu má gera framvirka samninga um hvað sem er, en sú gerð sem algengust er, eru framvirkir gjaldeyrissamningar.

6.2 Gengisskráning krónunnar

Gengisskráning krónunnar byggist á körfu:

	Hlutfall	3. mán vextir
Evrópa	68%	4,5%
USA	24%	5,0%
Japan	8%	1,0%

Við sjáum að vegnir erlendir vextir út frá körfunni eru:

$$0.68 \cdot 4,5\% + 0,24 \cdot 5\% + 0,08 \cdot 1\% = 4,34\%$$

Tökum lán í körfunni: 100 milljónir sem skiptist í 68% frá Evró, 24% frá USA og 8% frá Jap og erum þá að borga í vexti 4,34%. Fjárfestum svo í ríkisvíxli sem gefur 7,34% og endurgreiðum lánið að 3 mánuðum liðnum. Ef gengisvísitala helst óbreytt er ágóðinn: $100.000 \cdot (1+3\%)\ ^{3/12}$. Getum gert þetta án þess að eiga 100.000.000 með framvirkum samningum.

Hugsum okkur að 3ja mánaða vextir á Íslandi séu 7.32% en í Þýskalandi 4.34%. Viljum selja þýsk mörk framvirkt til 3ja mánaða:

$$\begin{array}{lcl} I_0 & : & \text{upphafleg fjárhæð í ISK} \\ \dfrac{I_0}{g_0} & : & \text{upphafleg fjárhæð í DEM, þ.e. } g_0 = \dfrac{\text{ISK}}{\text{DEM}} \end{array}$$

Fjárfestingum á Íslandi til 3ja mánaða. Þá fæst:

$$I_3 = I_0\,(1+7,34\%)^{3/12}$$

Ef fjárfest er í Þýskalandi til 3ja mánaða þá fæst:

$$J_3 = \left(\frac{I_3}{g_3}\right) = \frac{I_0}{g_0} \cdot (1+4.34\%)^{t/12}$$

Nú verður að gilda að:

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{I_3}{J_3} = \frac{I_0\,(1+7.34\%)^{t/12}}{\frac{I_0}{g_0}\,(1+4.34\%)^{t/12}} \\ &= g_0 \frac{(1+7.34\%)^{t/12}}{(1+4.34\%)^{t/12}} \\ &= \frac{g_0\,(1+r_i)^{t/12}}{(1+r_e)^{t/12}} \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.3 Staðlaðir framvirkir samningar

Staðlaðir samningar eru framvirkir samningar sem eru staðlaðir, þannig að hægt sé að skrá þá í kauphöllum. Ólíkt framvirkum samningum, er ekki endilega kveðið á um ákveðinn viðskiptadag, heldur getur verið um tímabil að ræða (1 viku, 1/2 mán, 1. mán o.s.frv). Venjan er að seljandinn ræður hvenær afhending fer fram.

Verðum futures samninga er gjarnan slegið upp í fjármálasíðum dagblaðanna. Ef þann 1.sept sést að futures verð á fulli fyrir des er \$500 þýðir það að fjárfestar vilja kaupa eða selja gull í des á \$500. Þetta verð sveiflast síðan eftir því hvort aukning verður í framboði eða eftirspurn eftir gulli.

Gengishagnaður eða tap á stöðluðum samningum er gert upp á daglegum grunni, en slíkt er ekki gert í ósöðluðum samningum.

6.4 Verðlagning framvirkra samninga

Skoðum 3 megin tilfelli

- Það verðbréf sem samningurinn er gerður um skapar engar greiðslur yfir líftíma samningsins (gæti t.d. verið eingrieðslubréf).

- Verðbréfið leiðir af sér þekkt greiðsluflæði.
- Verðbréfið greiðir samfeldan arð (vexti).

Gerum ráð fyrir því að þær niðurstöður sem fram verða settar fyrir framvirkar samninga muni jafnframt gilda fyrir staðalaða framvirka samninga. Þær forsendur sem við gefum okkur eru eftirfarandi:

- Enginn viðskiptakostnaður
- Aðilar á markaði geta lagt inn og fengið ótakmarkað lán á áhættulausu vöxtunum r. Vextir eru reiknaðir sem veldisvextir, þ.e.a.s. upphæð: $z_0 \to z_0 e^{rT}$
- Öll bréf á markaði eru óendanlega deilanleg og engar takmarkanir á skorstöðum.
- Fjárfestar eru skynsamir og gráðugir. Ef það eru högnunarmöguleikar er þeim eytt um leið.

Eftirfarandi tákn verða notuð:

$$
\begin{array}{rcl}
T & : & \text{tími fram að afhendingardegi} \\
S & : & \text{Verðið nú á grunnbréfinu} \\
K & : & \text{Verð á afhendingardegi} \\
f & : & \text{Verð á framvirkum samningi} \\
F & : & \text{Framvirkt verð grunnbréfs} \\
r & : & \text{Áhættulausir vextir}
\end{array}
$$

ATH: Við höfum að á þeim degi sem samningurinn er búinn til er $F = K$ og $f = 0$. Síðan breytist F og f eftir því sem tíminn líður.

(Dæmi í glósum)

6.4.1 Bréf sem bera ekki greiðsluflæði

Kaupum bréf S, seljum það framvirkt $\Rightarrow$ fáum greiðslu F að tíma T liðnum. Núvirði þessa greiðsluflæðis er Fe^{-rt} sem verður að vera jafnt S eigi að ríkja ajfnvægi. Ef núvirði greiðsluflæðisins er meira en spottgengi þá kaupum við bréfið og seljum það framvirkt. Ef núvirði bréfsins er minna en spotgengi seljum við bréfið og kaupum það framvirkt.

(Dæmi í glósum)

6.4.2 Greiðslur á eignarhaldstíma

Almenn verðlagning er eftirfarandi: Höfum bréf sem gefur af sér greiðslur og vitum að núvirði greiðslna er:

$$I = \sum_t g_t \cdot e^{-rt} \tag{6.2}$$

Lítum á eftirfarandi áætlun:

- Kaupum bréfið
- Seljum það framvirkt

Kostnaðurinn við áætlunina verður að vera hinn sami og núvirði þess greiðsluflæðis sem hún leiðir til, annars væri högnun fyrir hendi. Kostnaðurinn við að kaupa bréfið er S en kostnaðurinn við að ganga inn í framvika samninginn er enginn.

Bréfið ber með sér greiðslur sem hafa núvirði I og á tímapunkti T seljum við bréfið og fáum greiðsluna F. Eftirfarandi verður að gilda:

$$I + Fe^{-rt} = S \tag{6.3}$$

Finnum greiðsluflæði og núvirðum það:

$$F = (S \Leftrightarrow I)\, e^{rT} \tag{6.4}$$

Ef að $F > (S \Leftrightarrow I)\, e^{rT}$ þá felst hagnaður í því að kaupa eignina og selja hana framvirk. Ef F er hins vegar minna þá er hægt að hagnast með því að selja eignina og kaupa hana framvirkt.

6.4.3 Samfelldur arður

Til athugunar er bréf sem grieðir samfelldan arð eða vexti með stuðlinum q á ári. Skoðum eftirfarandi áætlun:

- Kaupum e^{-qt} stykki af bréfinu of endurfjárfestum aðrinn reglulega í bréfinu sjálfu (útgjöld $S \cdot e^{-qT}$).
- Seljum 1 bréf framvirkt á tíma T.

Þar sem að bréfið vex með hraðanum q fáum við á tíma T:

$$e^{-qT} \cdot e^{qT} = 1 \tag{6.5}$$

það er kaup sinnum vöxtur er bréf upp á eina einingu nafnvirðis. Eins og áður er verð áætlunarinnar jafnt núvirði þess greiðsluflæðis sem hún leiðir til ef engir högnunarmöguleikar ríkja:

$$\begin{aligned} Se^{-qt} &= Fe^{-rt} && (6.6) \\ F &= Se^{(r-q)T} && (6.7) \end{aligned}$$

Augljóst er að ef: $F < Se^{(r-q)T}$ þá er hægt að hagnast á því að kaupa framvirkan samning og selja bréfið „stutt". Ef $F > Se^{(r-q)T}$ þá skapast möguleiki til högnunar með því að kaupa bréf og selja framvirkan samning[1]..

Framvirkur samningur um kaup eða sölu á erlendum gjaldeyri er dæmi um þetta. Sá samfelldi arður sem býðst er sú ávöxtun sem ríkir á erlendum markaði.

Skilgreinum eftirfarandi stærðir:

$$\begin{aligned} r_F &: \text{Erlendir vextir} \\ r &: \text{Innlendir vextir} \\ S &: \text{Stundargengi erlends gjaldmiðils í ISK} \end{aligned}$$

Skoðum eftirfarandi áætlun:

[1]Ef arður breytist yfir líftíma samningsins en ferill hans er þekktur þá má sýna fram á að jafna (6.7) gildir þegar að q er jafnt meðalarði á líftíma bréfsins.

- Kaupum $e^{-r_F t}$ af erlendum gjaldmiðli og ávöxtum á áhættulausum vöxtum r_F.
- Seljum framvirkt eina einingu af erlendum gjaldmiðli á framvirka genginu F. þ.a. við fáum:

$$Se^{-r_F T} = Fe^{-rT} \tag{6.8}$$

eða

$$F = Se^{(r-r_F)T} \tag{6.9}$$

Hér gildir sem áður að:

Ef	$F > Se^{(r-r_F)T}$	Tökum lán í innlendri mynt
		Kaupum bréf í erlendri mynt
		Seljum erlenda mynt framvirkt
		Færslum lokað, jákvæður afgangur
Ef	$F < Se^{(r-r_F)T}$	Tökum lán í erlendri mynt
		Kaupum innlend bréf
		Kaupum erlendan
		Færslum lokað, jákvæður afgangur

6.5 Verðþróun framvirkra samninga

Gerum ráð fyrir því að framvirkur samningur sé gerður á tíma t. Á tíma 0 finnst nýtt framvirkt verð F. Ef við gerum framvirkan samning á tíma 0 með framvirku verði F og seljum gamla samninginn sem hafði samningsverðið K þá fæst á tímapunkti T greiðsluflæðið $F \Leftrightarrow K$ án allrar óvissu.

Verð á þessari áætlun verður að vera $(F \Leftrightarrow K)\, e^{rT}$. Að ganga inn í nýja samninginn er án kostnaðar, þ.e. verð gamla samningsins er gefið sem:

$$f = (F \Leftrightarrow K)\, e^{-rT} \tag{6.10}$$

eða:

$$\begin{aligned} \text{Engar greiðslur} &: \quad f = S \Leftrightarrow Ke^{-rT} \\ \text{Þekktar greiðslur} &: \quad f = S \Leftrightarrow I \Leftrightarrow Ke^{-rT} \\ \text{Samfelldur arður} &: \quad f = Se^{-qT} \Leftrightarrow Ke^{-rT} \end{aligned}$$

6.6 Mótvægi (hedging) og framvirkir samningar

6.6.1 Mikilvæg atriði

- Að hverju þarf að huga?
- Hver er önnur áhættustaða eigenda?
- Hvað gera samkeppnisaðilar?
- Viðhorf stjórnenda gangvart afleiðusamningum?
- Er mótvægisstaðan gnóttstaða eða skortstaða?
- Hvert á mótvægishlutfallið að vera

6.6.2 Möguleg vandamál

- Ekki er til staðlaður framvirkur samningur á það verðbréf sem skapa þarf mótvægi gegn.
- Lokadagur kaup/sölu-dagur verðbréfsins er óþekktur frá sjónarhóli þess sem leitast við að skapa mótvægi.
- Lokadagur þekktur en ekki er til staðlaður framvirkur samningur með þann gjalddaga, m.ö.o. innleysa þarf framvirkan samning fyrir (eða eftir) gjalddaga hans.

6.6.3 Grunnáhætta

Gefum okkur tvær dagsetningar: t_1 þegar að framvirkur samningur er gerður og t_2 þegar að framvirkum samningi er lokað. Samningi þarf ekki að loka á gjalddaga, heldur getur hann einnig verið seldur/keyptur á markaði.

Fyrirtæki sem tekur á móti greiðslu í erlendri mynt á tíma t_2 shortar framvirkum samningi. Verð sem greitt er fyrir samninginn er F_1 en þegar samningnum er lokað fæst F_2 fyrir hann. Verðið sem fyrirtækið fær fyrir erlenda gjaldeyrinn er því: $S_2 \Leftrightarrow (F_2 \Leftrightarrow F_1)$. Við sjáum því að:

$$F_1 + S_2 \Leftrightarrow F_2 = F_1 + b \tag{6.11}$$

og vitum að F_1 er þekkt í upphafi en ekki b_2. Áhætta í samningum felst á breytingum á b_2 og er kölluð grunnáhætta (basis risk).

6.6.4 Mótvægishlutfall

Reiknum með að selja N_A-einingar. Sköpum mótvægi með skortsetu á í Futures á N_F einingar Mótvægishlutfall er skilgreint:

$$h \equiv \frac{N_F}{N_A} \tag{6.12}$$

Það verð sem við fáum er:

$$\begin{aligned} Y &= S_2 N_A \Leftrightarrow (F_2 \Leftrightarrow F_1)\, N_F \\ &= S_1 N_A \Leftrightarrow (S_2 \Leftrightarrow S_1)\, N_A + (F_2 \Leftrightarrow F_1)\, N_F \\ &= S_1 N_A + N_A\, (\Delta S \Leftrightarrow h \Delta F) \end{aligned}$$

Stærðirnar S_1 og N_A eru fastar (þekktar fyrirfram). Við bestun mótvægishlutfalls viljum við því lágmarka fervik $(\Delta S \Leftrightarrow h\Delta F)$. Fervikið er:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_s^2 + h^2 \sigma_F^2 \Leftrightarrow 2h\sigma_{sf} \\ &= \sigma_s^2 + h^2 \sigma_F^2 \Leftrightarrow 2h\rho\sigma_f\sigma_s \\ &= (h\sigma_F \Leftrightarrow \rho\sigma_s)^2 \Leftrightarrow \rho^2\sigma_s^2 + \sigma_s^2 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Verkefnið er s.s. að lágmarka svigann í ofangreindri jöfnu. Lágmark ríkir þegar að innihald svigans er jafnt núlli, eða:

$$h^* = \rho \frac{\sigma_s}{\sigma_F} \tag{6.14}$$

Þetta hlutfall er halli bestun línu þegar að ΔS er regressað gegn ΔF, en jafna (6.14) er jafna metilsins. Þetta má einnig skýra með því að h^* samsvarar breytingum á ΔS m.t.t. breytinga í ΔF. Það hversu mótvægið er áhrifaríkt (þ.e. vænt gildi) er ρ^2 eða:

$$\rho^2 = h^{*2}\frac{\sigma_F^2}{\sigma_S^2} \tag{6.15}$$

Parametrarnir eru gjarnan metnir út frá sögulegum gögnum. Mörg jöfn tímabil eru valin og gildi ΔS og ΔF reiknuð út. Til þess að ná hagkvæmum niðurstöðum borgar sig að nota sama tímabil við gagnavinnslu og það tímabil sem mótvægið á að gilda.

Verðmæti framvirkra samninga fyrir gefið mótvægishlutfall er $h \cdot N_A$. Fjöldi samninga er því

$$N^* = \frac{h^* N_A}{Q_F} \tag{6.16}$$

þar sem að Q_F er stærð eins framvirks samnings í viðkomandi einingum.

Ef að við endurskilgreinum: S sem virði mótvægisins og F er verðmæti allra framvirku samningana þá getum við ritað:

$$N^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{6.17}$$

6.6.5 Til athugunar

Þegar velja á framvirkan samning

- Ef ekki er til samningur á þá vöru sem skapa á mótvægi gegn þarf með tölfræðilegum prófum að finna þann samning sem mestu fylgnina gagnvart breytingum í verði vörunnar til að gegna því hlutverki
- Þegar ekki er til samningur með óskuðum gjalddaga er yfirleitt reynt að notast við næsta gjalddaga á eftir (basis áhætta er minni eftir því sem nær dregur samningsdegi)

(Dæmi í glósum)

6.6.6 Futures á hlutabréfavísitölu

Hægt er að sýna fram á að þegar skapa á mótvægi gegn hlutabréfaeign með framvirkum samningi á hlutabréfavísitölu er hagstæðasti fjöldi framvirkra samninga gefinn með jöfnu:

$$N^* = \beta\frac{S}{F} \tag{6.18}$$

þar sem að S er virði hlutabréfaeignar og F er framvirkt verð $\times$ fjöldi samninga. Ath: framvirkt verð á hlutabréfavísitölu er reiknað sem:

$$F = Se^{(r-q)T} \tag{6.19}$$

Ath: Munum að jafna verðbréfamarkaðslínunnar gefur okkur eftirfarandi:

$$r_p = r_{RF} + \left(\frac{r_M \Leftrightarrow r_{RF}}{\sigma_m}\right)\sigma_p \tag{6.20}$$

Dæmi

Þegar dæmi er tekið um mótvægi við hlutabréfasafn og að lokadagur mótvægis er skemmri en gjalddagi framvirks samnings verður að taka eftirfarandi skref til þess að meta hagnað/tap á lokadegi:

- Við þekkjum S_1 og getum reiknað F_2 út frá því. Hagnaður af framvirkum viðskiptum fyrir skortstöðu er:

$$\pi_F = N \cdot (F_1 \Leftrightarrow F_2) \tag{6.21}$$

- Við tökum breytingu á verðmæti vísitölu og umreiknum yfir í prósentubreytingu. Ef að vísitala greiðir arð d verður að taka tillit til þess. Prósentubreyting verðmætis vísitölunar yfir tímabilið er:

$$r_{M,t} = \frac{V_2}{V_1} + (1+d)^t \Leftrightarrow 1 \tag{6.22}$$

- Við reiknum ávöxtun eignasafnsins út frá CAPM:

$$r_{p,t} = (r_{RF})^t + \left(\frac{r_{M,t} \Leftrightarrow (r_{RF})^t}{(r_{RF})^t} \right) \tag{6.23}$$

- Við finnum ávöxtun safnsins í krónutölum:

$$\pi_P = (1 + r_{p,t})\, S_1 \tag{6.24}$$

- „Hagnaður" af viðskiptunum er því:

$$\pi = \pi_F + \pi_P \tag{6.25}$$

Breyting á beta gildi

Það er einnig til í dæminu að við viljum breyta beta-gildi safnsins úr β í β^*. Almennt getum við sagt að ef $\beta^* < \beta$ þá setjum við okkur í skortstöðu sem nemur:

$$N = (\beta \Leftrightarrow \beta^*)\, \frac{S}{F} \tag{6.26}$$

Ef $\beta^* > \beta$ þá kaupum við framvirka samninga á vísitölu sem nemur:

$$N = (\beta^* \Leftrightarrow \beta)\, \frac{S}{F} \tag{6.27}$$

(Dæmi í bók)

6.7 Mótvægi á skuldabréfasafn

6.7.1 Framvextir út frá vöxtum (samfellt ávöxtun)

Forwardvextir eru þeir vextir sem leysa:

$$e^{r_0 \cdot t_0} \cdot e^{\hat{r}\hat{t}} = e^{r_1 t_1} \tag{6.28}$$

eða:

$$\begin{aligned} r_0 t_0 + \hat{r}\hat{t} &= r_1 t_1 \\ \hat{r} &= \frac{r_1 t_1 + r_0 t_0}{\hat{t}} = \frac{r_1 t_1 \Leftrightarrow r_0 t_0}{t_1 \Leftrightarrow t_0} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Ef við gerum ráð fyrir því að fjárfestir geti tekið lán eða fjárfest á spot-gengi getur hannlæst inni framvextina fyrir framtíðar-tímabil. Þetta er gert með því að selja bréfið sem er í upphafi og kaupa bréf sem er í lok framvaxtatímabils.

6.7.2 Víxlar

Skilgreinum T sem gjalddaga framvirks samnings. Víxill með gjalddaga T^* hefur núvirði V^*, þ.a.:

$$V^* = 100e^{-r^*T^*} \tag{6.30}$$

Framvirkt verð á slíku bréfi með afhendingu á tíma T er:

$$\begin{aligned} F &= V^* \cdot e^{rT} \\ &= 100e^{-r^*T^*} \cdot e^{rT} \\ &= 100e^{rt-t^*T^*} \\ &= 100e^{\hat{r}(T-T^*)} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Við getum einnig sagt að:

$$F = \frac{V^*}{e^{-rt}} = 100 \cdot \frac{V^*}{V} \tag{6.32}$$

þar sem að V er núvirði víxils sem fellur á gjalddaga T. Við sjáum því eftirfarandi:

$$\begin{aligned} V &= 100 \cdot \frac{V^*}{F} \\ 100e^{-rT} &= 100\frac{V^*}{F} \\ \Leftrightarrow rT &= \ln\left(\frac{V^*}{F}\right) \end{aligned}$$

Og þannig höfum við formúlu fyrir repo-rate:

$$r = \frac{\ln\left(\frac{F}{V^*}\right)}{T} \tag{6.33}$$

en repo rate eru vextirnir sem fjárfestir geta fengið að láni með sölu til fjárfesta gegn því að kaupa bréfin aftur til baka síðar. Þetta er einnig þeir vextir sem fjármálastofnanir lána án áhættu.

(dæmi í glósum)

6.7.3 Afborgunarbréf

Við höfum séð að framvirkt verð á bréfi sem ber þekkt greiðsluflæði er:

$$F = (S \Leftrightarrow I)\, e^{rT} \tag{6.34}$$

þar sem að I er núvirði allra inngreiðslna. Við getum auðveldlega fundið framvirði með því að stinga inn núvirtu greiðsluflæði inn í formúluna:

$$\begin{aligned} F &= \left[\sum_{i=1}^{T^*} Y_i e^{-r_i \cdot i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{T} Y_i e^{-r_i i}\right] e^{rT} \\ &= \left(\sum_{i=T^*-T+1}^{T^*} Y_i e^{-r_i i}\right) e^{rT} \qquad (6.35) \end{aligned}$$

6.8 Meðaltími og mótvægi

Meðaltími mælir hversu lengi eigandi skuldabréfs þarf að bíða þangað til hann fær greiðslur (að meðaltali). Greum ráð fyrir því að eigandi skuldabréfs fær greiðslu c_i á tíma t_i. Verð og vextir (samfelldir) tengjast:

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-y t_i} \qquad (6.36)$$

Meðaltími bréfsins er skilgreindur sem:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-y t_i}}{B} \qquad (6.37)$$

eða:

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-y t_i}}{B}\right] \qquad (6.38)$$

Hornklofinn stendur fyrir hlutfall núvirði einstakrar greiðslu gegn núvirði bréfsins. Við sjáum út frá jöfnu (6.36) að:

$$\Delta B = \Leftrightarrow \Delta y \sum_{i=1}^{n} c_i t_i e^{-y t_i} \qquad (6.39)$$

Við sjáum út frá jöfnum (6.37) og (6.39) að fyrsta gráðu nálgun verðbreytinga er:

$$\Delta B = \Leftrightarrow B D \Delta y \qquad (6.40)$$

sem má ennfremur rita:

$$\frac{\Delta B}{B} = \Leftrightarrow D \Delta y \qquad (6.41)$$

en þarna kemur fram að prósentubreyting gengis skuldabréfs fyrir breytingu í ávöxtun er í hlutfalli við meðaltíma bréfsins[2].

Innan ákveðinna marka má segja að:

$$\Delta F = \Leftrightarrow F D_F \Delta y \qquad (6.42)$$

Þar sem hér er gert ráð fyrir því að um sama Δy sé að ræða í framvirku og spot og því er $\rho_{\Delta F, \Delta B} = 1$. Almenna aðferð við mótvægi út frá sögulegum gögnum var að ákvarða hagkvæmasta fjölda samninga með:

$$N^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \qquad (6.43)$$

[2]Ath: Gert hefur verið ráð fyrir samfelldum vexti. Ef við gerum hins vegar ráð fyrir því að y sé sett fram með árlegum vexti má sýna fram á að jöfnu (6.40) megi rita: $\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$

Stingum inn í eftirfarandi:

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_F} = \frac{SD_S}{FD_F} \tag{6.44}$$

og því fáum við:

$$N^* = \frac{SD_S}{FD_F} \tag{6.45}$$

en þetta er mótvægishlutfall m.t.t. meðaltíma. Með því að nota þetta hlutfall til mótvægis verður meðaltíminn núll. Þetta hlutfall er ekki fullkomið:

- Gert er ráð fyrir því að Δy sé það sama fyrir alla vexti. Í raun eru skammtímavextir sveiflukenndari en langtímavextir og eru ekki mjög fylgnir.
- Ef convexity undirliggjandi eignar er mjög frábrugðin convexity þeirrar eignar sem mótvægi er skapað með geta miklar vaxtabreytingar komið illa út.
- Til þess að hægt sé að reikna D_F verður að gera ráð fyrir því að cheapest-to-deliver bund.

6.9 Skiptasamningar

Ekki verður farið ýtarlega í skiptasamninga hér. Þó verður farið í helstu atriði. Skiptasamningur er samningur milli tveggja fyrirtækja um að skiptast á framtíðargreiðsluflæðum eftir ákveðinni formúlu. Í raun má líta á skiptasamninga sem eignasafn framvirkra samninga.

Algengasta tegund skipasamninga er „plain-vanilla" vaxtaskipti: Aðili B samþykkir að greiða A greiðsluflæði sem er jafn vöxtum á ákveðnum föstum vöxtum á höfuðstól í ákveðin ár. Á sama tíma samþykkir A að greiða að hluta til fyrir B greiðsluflæði sem er jafn fljótandi vaxta á sama höfuðstól fyrir sama tímabil.

Ástæðan fyrir samningum sem þessum liggur í hlutfallslegum yfirburðim. Sum fyrirtæki hafa hlutfallslega yfirburði á mörkuðum fastra vaxta en önnur hafa yfirburði í mörkuðum fljótandi vaxta. Þegar fyrirtæki sækir um lán borgar það sig að fara þangað sem fyrirtækið hefur hlutfallslega yfirburði. Tegund láns er þó ekki ávallt sú tegund sem fyrirtækið sækist ekki og því getur verið hagkvæmt að skipta á lánum við annað fyrirtæki sem hefur hlutfallslega yfirburði í því láni sem sóst er eftir.

Hagnaður sem verður af skiptasamningum er hærri vaxtamunurinn mínus lægri vaxtamuninum. Hagnaður þessi getur skipst á milli samningsaðila hvernig sem er. Hlutur hvers og eins fer eftir því hvað hann gerir góðan samning. Við sjáum að þegar búið er að greiða Libor vextina (eða allar undirliggjandi vaxtatölur) þá er hagnaður markaðsaðila eftirfarandi:

$$\pi_A = M_{BA} \Leftrightarrow V_A \tag{6.46}$$

$$\pi_B = \Leftrightarrow V_B \Leftrightarrow M_{BA} \tag{6.47}$$

þar sem að V_A og V_B eru vaxtagreiðslur sem aðilarnir greiða af upprunalegu lánum sínum og M_{BA} er millifærsla frá B til A. Ef þessi stærð er neikvæð er um að ræða millifærslu frá A til B. Hagnaðurinn skiptist á milli markaðsaðilianna (ekkert fer til spillis):

$$\pi_A + \pi_B = \pi \tag{6.48}$$

Ef við skilgreinum stærðina $\alpha \in [0,1]$ sem prósentu A af heildarhagnaði þá má sýna fram á eftirfarandi (eigin útleiðsla):

$$\begin{aligned}
\alpha \pi_A + (1 \Leftrightarrow \alpha)\, \pi_B &= \pi \\
\alpha\, (M_{BA} \Leftrightarrow V_A) + (1 \Leftrightarrow \alpha)\, (\Leftrightarrow V_B \Leftrightarrow M_{BA}) &= \pi \\
2\alpha M_{BA} \Leftrightarrow \alpha V_A \Leftrightarrow V_B \Leftrightarrow M_{BA} + \alpha V_B &= \pi \\
2\alpha M_{BA} \Leftrightarrow M_{BA} &= \alpha V_A + V_B \Leftrightarrow \alpha V_B + \pi
\end{aligned}$$

Við fáum því:

$$M_{BA} = \frac{\alpha V_A + (1 \Leftrightarrow \alpha)\, V_B + \pi}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \tag{6.49}$$

Í ofangreindum vaxtaskiptasamningum er ekki skipt á höfuðstólum. Þegar um gjaldmiðlaskiptasamninga er að ræða er hinsvegar bæði skipt á vöxtum og höfuðstól. Ávallt er skipt á höfuðstól í lokin en stundum í upphafi.