Atvinnuvegahagfræði
Verkefni 3

Sigurgeir Örn Jónsson - kt: 280674-5919
Kennari: Þórólfur Matthíasson

27. nóvember 1996

1 Eftirlitsleikurinn

Hér er um að ræða leik milli verkamanns (leikm 1) og atvinnurekanda (leikm 2). Verkamaður getur unnið(V) eða svikist um(S) en atvinnurekandinn getur fylgst með(F) eða ekki(E). Atvinnurekandinn greiðir laun w nema hann komi upp um vinnusvik á viðkomandi tímabili. Óþægindi verkamannsins af vinnu eru g en framleiðsluverðmæti ef verkamaðurinn vinnur er v. Kostnaður við að hafa eftirlit er h og fellur allur á atvinurekandann. Þá er gert ráð fyrir því að $g > h > 0$

1.1 Normal form leiksins

Leikinn má rita upp á töfluformi:

		Verkamaður	
		V	S
Atvinnurekandi	F	$w-g$ $v-h$	0 $-h$
	E	$w-g$ v	w 0

1.2 Hrein leikjabrögð

Gerum ráð fyrir því að $w > h$. Næsta skref er að finna bestu svör við hverja mögulega áætlun andstæðingsins, fyrir báða leikmenn. Skilgreinum S sm mengi ákvarðana verkamannsins og T sem mengi ákvarðana atvinnurekandans. Bestu svör leikmanna eru því $R_V : T \to S$ fyrir verkamanninn og $R_A : S \to T$ fyrir atvinurekandann. Bestu svör leikmanna við áætlunum mótherja eru eftirfarandi:

$$\begin{array}{ll} R_V\left(F\right) = V & R_A\left(V\right) = E \\ R_V\left(E\right) = S & R_A\left(S\right) = F \end{array}$$

Til nánari skýringar feitletra ég bestu svör á eftirfarandi töflu:

		Verkamaður	
		V	S
Atvinnurekandi	F	$\mathbf{w-g}$ $v-h-w$	0 $-\mathbf{h}$
	E	$w-g$ $\mathbf{v-w}$	$\mathbf{w}$ $-w$

Par (s,t) hreinna áætlana er Nash jafnvægi e.f.f.:

$$s \in R_V(t) \quad og \quad t \in R_2(s)$$

Við sjáum að engin bestu svör eru í sama reitnum hjá báðum leikmönnum og því má álykta sem svo að Nash jafnvægi sé ekki í hreinum áætlunum.

1.3 Blandaðar áætlanir

Gerum ráð fyrir því að verkamaðurinn svíkjist undan með líkindum x og að atvinurekandinn fylgist með, með líkindum y.

1.3.1 Verkamaðurinn

Reiknum út væntan hagnað m.v. hverja áætlun verkamannsins:

$$\begin{aligned} E_{V,V}(y) &= y(w-g) + (1-y)(w-g) = w-g \\ E_{V,S}(y) &= y \cdot 0 + (1-y) \cdot w = (1-y) \cdot w \end{aligned}$$

Verkamaðurinn hreina áætlun V ef að:

$$\begin{aligned} E_{V,V}(y) &\geq E_{V,S} \\ w-g &\geq (1-y) \cdot w \\ 1-g/w &\geq 1-y \\ y &\geq \frac{g}{w} \end{aligned}$$

Viðbragðsfall verkamannsins er því:

$$R_V(y) = \begin{cases} \{V\} & \text{ef } y > g/w \\ \{V,S\} & \text{ef } y = g/w \\ \{S\} & \text{ef } y < g/w \end{cases}$$

1.3.2 Atvinnurekandinn

Reiknum út væntan hagnað m.v. hverja áætlun atvinnurekandans:

$$\begin{aligned} E_{A,F}(x) &= (1-x)(v-h-w) + x(-h) = (1-x)(v-h-w) - xh \\ &= v-h-w-xv+xw \\ E_{A,E}(x) &= (1-x)(v-w) + x(-w) = (1-x)(v-w) - xw \\ &= -xv+v-w \end{aligned}$$

Atvinnurekandinn velur hreina áætlun F ef að:

$$\begin{aligned} E_{A,F}(x) &\geq E_{A,E}(x) \\ v-h-w-xv+xw &\geq -xv+v-w \\ -h+xw &\geq 0 \\ x &\geq \frac{h}{w} \end{aligned}$$

Viðbragðsfall atvinnurekandans er því:

$$R_A(x) = \begin{cases} \{F\} & \text{ef } x > h/w \\ \{F,E\} & \text{ef } x = h/w \\ \{E\} & \text{ef } x < h/w \end{cases}$$

1.3.3 Nash jafnvægi

Nash jafnvægi ríkir þar sem viðbragðsföllin skerast þ.e. $x = h/w$ og $y = g/w$

1.4 Ákvörðun launa

		Verkamaður	
		V	S
Atvinnurekandi	F	$v-h-w$, $\mathbf{w-g}$	$\mathbf{-h}$, 0
	E	$\mathbf{v-w}$, $w-g$	$-w$, $\mathbf{w}$

Gerum ráð fyrir því að atvinnurekandinn ákvarði launin. Hann hámarkar vongildi hagnaðar að gefnu Nash-jafnvægi:

$$\begin{aligned} \max \quad E\pi &= x(1-y)(v-h-w) + xy(-h) + (1-x)(1-y)(v-w) \\ &\quad + (1-x)y(-w) \\ &= -xh + xyw + v - w - yv \end{aligned}$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w}(-xh + xyw + v - w - yv) &= 0 \\ xy - 1 &= 0 \\ \frac{h}{w} - \frac{g}{w} - 1 &= 0 \\ w &= h - g \end{aligned}$$

Launin sem hámarka væntan hagnað atvinnurekanda eru því: $h - g$.

2 Fjárfesting í R&Þ

Hagnaðarföll tveggja fyrirtækja eru:

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= q_i\,(12 - q_i) - (1 + 6q_i) - K \cdot I + Q_i\,(12 - Q_i - Q_e) \\
&\quad - (1 + 6Q_i) \cdot N - (1 + 4q_i) \cdot I \\
\pi_e &= Q_e\,(12 - Q_i - Q_e) - (1 + 6Q_e)
\end{aligned}
$$

Þar sem að lítið q táknar magn á tímabili 1 og stórt Q magn á tímabili tvö. Fyrirtæki i er gamla fyrirtækið („gamli gaurinn"), rótgróið fyrirtæki sem er á markaðnum í upphafi og stendur frammi fyrir því að ákvarða hvort að fjárfesting í rannsókna- og þróunarstarfsemi borgi sig. Fyrirtæki e er innkomufyrirtækið, fyrirtæki sem á möguleika á því að koma inn á markaðinn á síðara tímabilinu.

Ef að gamla fyrirtæki ákveður að fjárfesta þá verða breyturnar $I = 1$ og $N = 0$. Ef fyrirtækið leggur ekki í fjárfestingu verða þær hins vegar $I = 0$ og $N = 0$

2.1 Viðbragðsfall innkomufyrirtækisins

Hagnaður innkomufyrirtækisins (e) er ekki háð fjárfestingu i með beinum hætti (aðeins óbeinum í gegn um markaðinn). Viðbragðsfall fyrirtækisins er því óháð fjárfestingaákvörðun og alltaf eins.

Hámörkum hagnað:

$$\max \quad \pi_e = Q_e\,(12 - Q_i - Q_e) - (1 + 6Q_e)$$

Fyrsti gráðu skilyrði er eftirfarandi:

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial Q_e} = 6 - Q_i - 2Q_e = 0$$

Viðbragðsfall innkomufyrirtækis er því:

$$Q_e = 3 - \frac{1}{2}Q_i$$

2.2 Viðbragðsföll gamla ft. m.v. fjárfestingu í R&Þ

Ef að gamla fyrirtækið fjárfestir í R&Þ þá eru hliðarskilyrði hagnaðarhámörkunar: $I = 1$ og $N = 0$.

Hámörkum hagnað:

$$
\begin{aligned}
\max \quad \pi_i &= q_i\,(12 - q_i) - (1 + 6q_i) - K \cdot I + Q_i\,(12 - Q_i - Q_e) \\
&\quad - (1 + 6Q_i) \cdot N - (1 + 4q_i) \cdot I \\
m.t.t \quad I &= 1 \\
N &= 0
\end{aligned}
$$

Stingum hliðarskilyrðum inn í markfallið:

$$\max \quad \pi_i = q_i\,(12 - q_i) - (1 + 6q_i) - K + Q_i\,(12 - Q_i - Q_e) - (1 + 4Q_i)$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \partial\pi_i/\partial q_i &= 2 - 2q_i = 0 \\ \partial\pi_i/\partial Q_i &= 12 - 2Q_i - Q_e = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Viðbragðsföll gamla fyrirtækisins eru því:

$$\begin{aligned} q_i &= 1 \\ Q_i &= 6 - \frac{1}{2}Q_e \end{aligned}$$

Hér sjáum við að viðbragðsfall á fyrra tímabili er fasti, enda á inngöngufyrirtækið ekki möguleika á því að koma inn á markaðinn fyrr en á síðara tímabili.

2.3 Viðbragðsföll gamla ft. m.v. enga fjárfestingu

$$\begin{aligned} \max \quad \pi_i &= q_i\,(12 - q_i) - (1 + 6q_i) - K \cdot I + Q_i\,(12 - Q_i - Q_e) \\ &\quad - (1 + 6Q_i) \cdot N - (1 + 4q_i) \cdot I \\ m.t.t \quad I &= 0 \\ N &= 1 \end{aligned}$$

Stingum hliðarskilyrðum inn í markfallið:

$$\max \quad \pi_i = q_i\,(12 - q_i) - (1 + 6q_i) + Q_i\,(12 - Q_i - Q_e) - (1 + 6Q_i)$$

Fyrstu gráðu skilyrði eru eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \partial\pi_i/\partial q_i &= 6 - 2q_i \Rightarrow q_i = 3 \\ \partial\pi_i/\partial Q_i &= 6 - 2Q_i - Q_e = 0 \end{aligned}$$

Viðbragðsfall gamla fyrirtækisins er því:

$$\begin{aligned} q_i &= 3 \\ Q_i &= 3 - \frac{1}{2}Q_e \end{aligned}$$

2.4 Markaðsjafnvægi viðbragðsfalla

Jafnvægi ríkir þar sem að viðbragðsföllin skerast því þá eru framleiðsluáætlanir hvors aðila um sig besta svar við áætlun mótherjans. Í leik þessum geta myndast 4 jafnvægi viðbragsfalla. Gamla fyrirtækið getur velur milli þess að fjárfesta eða ekki og inngöngufyrirtækið velur hvort það kemur inn á markaðinn eða ekki.

2.4.1 Gamli gaur fjárfestir - fyrirtæki kemur inn á markaðinn

Viðbragðsföllin eru eftirfarandi

$$\begin{aligned} q_i &= 1 \\ Q_i &= 6 - \frac{1}{2}Q_e \\ Q_e &= 3 - \frac{1}{2}Q_i \end{aligned}$$

Sjá má hvar föllin skerast með því að leysa ofangreint jöfnukerfi. Lausnin er eftirfarandi:

$$\begin{aligned} q_i &= 1 \\ Q_e &= 0 \\ Q_i &= 6 \end{aligned}$$

Við getum fundið verð á sitt hvoru tímabili með því að stinga framleiðsluákvörðunum inn í eftirspurnarföll:

$$\begin{aligned} P_1 &= (12 - q_i) = 11 \\ P_2 &= (12 - Q_i - Q_e) = 6 \end{aligned}$$

Hagnaður fyrirtækjanna verður því:

$$\begin{aligned} \pi_i &= 35 - K \\ \pi_e &= -1 \end{aligned}$$

2.4.2 Gamla ft. fjárfestir - fyrirtæki kemur ekki inn

Við sjáum að ef að inngöngufyrirtækið fer ekki inn á markaðinn þá er $Q_e = 0$ (sama magn og ef fyrirtækið hefði farið inn á markaðinn) og hagnaður gamla fyrirtækisins því óháður inngöngu nýja fyrirtækisins. Verðlag verður eins og hér að ofan og hagnaður fyrirtækjanna verður:

$$\begin{aligned} \pi_i &= 35 - K \\ \pi_e &= 0 \end{aligned}$$

Ath: Gerum ráð fyrir því að hagnaður inngöngufyrirtækisins sé núll ef það ákveður að sleppa inngöngu.

2.4.3 Gamla ft. fjárfestir ekki - fyrirtæki kemur inn

Viðbragðsföllin eru eftirfarandi

$$\begin{aligned} q_i &= 3 \\ Q_e &= 3 - \frac{1}{2}Q_i \\ Q_i &= 3 - \frac{1}{2}Q_e \end{aligned}$$

Lausnin verður því:

$$\begin{aligned} q_i &= 3 \\ Q_e &= 2 \\ Q_i &= 2 \end{aligned}$$

Eftirfarandi markaðsverð ríkir:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(12 - q_i^1\right) = 9 \\ P_2 &= (12 - 2 - 2) = 8 \end{aligned}$$

Hagnaður fyrirtækjanna verður þannig:

$$\begin{aligned} \pi_i &= 11 \\ \pi_e &= 3 \end{aligned}$$

2.4.4 Gamli ft.fjárfestir ekki - fyrirtæki kemur ekki inn

Eins og áður, verður $Q_E = 0$ ef inngöngufyrirtækið kemur ekki inn á markaðinn. Viðbragðsföll gamla fyrirtækisins einfaldast því niður í hreina lausn:

$$\begin{aligned} q_i &= 3 \\ Q_e &= 0 \\ Q_i &= 3 \end{aligned}$$

Ný markaðsverð:

$$\begin{aligned} P_1 &= 9 \\ P_2 &= 9 \end{aligned}$$

Hagnaður fyrirtækjanna verður því:

$$\begin{aligned} \pi_i &= 16 \\ \pi_e &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Nash-jafnvægi m.v. ósamhverfar upplýsingar

Ef við gerum ráð fyrir því að inngöngufyrirtækið viti ekki hvort að gamla fyrirtækið hafi lagt í fjárfestingu eða ekki getum við sett fram leik fyrirtækjanna með eftirfarandi hætti:

		Innkomufyrirtæki (e)	
		I	A
Gamli gaur (i)	F	-1 / $35-K$	0 / $35-K$
	N	3 / 11	0 / 16

Þar sem að ákvarðanir eru: F=fjárfesting, N=engin fjárfesting, I=innkoma og A=afskiptaleysi (engin innkoma). Sjá má að ef $K > 35 - 11$, þ.e. $K > 24$, þá er N ráðandi hrein áætlun fyrir gamla fyrirtækið og Nash jafnvægi skapast í áætlunum (I, N). Ef að $K < 35 - 16$, þ.e. $K < 19$ þá er F ráðandi hrein áætlun fyrir Gamla gaurinn og hreint nash-jafnvægi skapast í áætlunum (F, A).

Ef að $19 \leq K \leq 24$ er ekki hægt að alhæfa um nash-jafnvægi í hreinum áætlunum þar sem að engin hrein áætlun er sterklega ráðandi. Grípum því til blindingsleikbragða og skoðum mögulegt blandað Nash-jafnvægi. Skilgreinum eftirfarandi líkindi:

$$\begin{aligned} p &= \text{líkurnar á því að gamla ft. velji F} \\ q &= \text{líkurnar á því að innkomufyrirtækið velji I} \end{aligned}$$

2.5.1 Gamli gaurinn

Reiknum vongildi hagnaðar fyrir mögulegar ákvarðanir gamla fyrirtækisins að gefnum líkindum q:

$$\begin{aligned} E(\pi_i|F) &= q \cdot (35 - K) + (1 - q)(35 - K) \\ &= 35 - K \\ E(\pi_i|N) &= q \cdot 11 + (1 - q)\,16 \\ &= 16 - 5q \end{aligned}$$

Gamli gaurin velur hreina áætlun F ef að:

$$\begin{aligned} E(\pi_i|F) &> E(\pi_i|N) \\ 35 - K &> 16 - 5q \\ q &> \frac{1}{5}K - \frac{19}{5} \end{aligned} \tag{2}$$

Bestu svör gamla fyrirtækisins eru því:

$$R_i(q) = \begin{cases} \{F\} & \text{ef } q > \frac{1}{5}K - \frac{19}{5} \\ \{F, N\} & \text{ef } q = \frac{1}{5}K - \frac{19}{5} \\ \{N\} & \text{ef } q < \frac{1}{5}K - \frac{19}{5} \end{cases}$$

2.5.2 Inngöngufyrirtækið

Reiknum vongildi hagnaðar fyrir mögulegar ákvarðanir inngöngufyrirtækisins að gefnu p:

$$\begin{aligned} E(\pi_E|I) &= p \cdot (-1) + (1-p) \cdot 3 \\ &= 3 - 4p \\ E(\pi_E|A) &= p \cdot 0 + p \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Inngöngufyrirtækið velur hreina áætlun I ef að:

$$\begin{aligned} E(\pi_E|I) &> E(\pi_E|A) \\ 3 - 4p &> 0 \\ p &< \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bestu svör inngöngufyrirtækisins eru því:

$$R_E(p) = \begin{cases} \{I\} & \text{ef} \quad p < \frac{3}{4} \\ \{I, A\} & \text{ef} \quad p = \frac{3}{4} \\ \{A\} & \text{ef} \quad p > \frac{3}{4} \end{cases}$$

2.5.3 Jafnvægi

Nash jafnvægi ríkir í blönduðum áætlunum þar sem að viðbragðsföllin skerast, ef að $p, q \in [0,1]$. Ef viðbragðsföll skerast í óleyfilegum líkindum, er nash-jafnvægi (ef einhvað er) það jafnvægi sem ríkir í hreinum áætlunum.

Viðbragðsföllin skerast í $p = 3/4$ og $q = \frac{1}{5}K - \frac{19}{5}$. Við sjáum að til er blönduð lausn meðan að $19 \leq K \leq 24$. Í þessu jafnvægi er væntur hagnaður fyrirtækjanna.

$$\begin{aligned} E(\pi_i|p,q) &= p \cdot (35 - K) + (1-p)(16 - 5q) \\ &= \frac{3}{4}(35 - K) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(16 - 5\left(\frac{1}{5}K - \frac{19}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}K - \frac{19}{5} \\ E(\pi_E|p,q) &= q \cdot (3 - 4p) + (1-q) \cdot 0 \\ &= \left(\frac{1}{5}K - \frac{19}{5}\right)\left(3 - 4 \cdot \frac{3}{4}\right) + 0 \\ &= \left(\frac{1}{5}K - \frac{19}{5}\right) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.5.4 Hagur neytenda

Þar sem að eftirspurnarföll á báðum tímabilum eru línuleg er hægt að reikna út umframábata (*e. consumer surplus*) sem einfaldan þríhyrning:

$$CS = \frac{\left(P^0 - P^M\right) \cdot Q^M}{2}$$

Þar sem að P^0 er það verð sem veldur því að eftirspurnarmagn verði núll. P^0 er óháð ákvörðunum leikenda og því getum við reiknað það út fyrir bæði tímabil:

$$\begin{aligned} P_1^0 &= (12 - 0) = 12 \\ P_2^0 &= (12 - 0 - 0) = 12 \end{aligned}$$

Setja má umframábata neytenda upp í töflu:

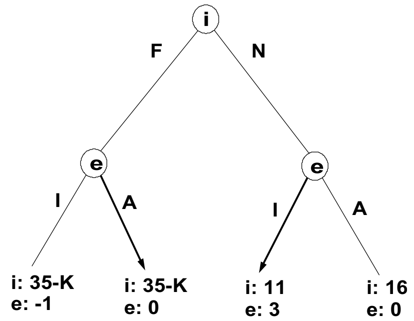
Gamla ft. \ Inngönguft.	I	A
F	18.5	12.5
N	18.5	9

Við höfum séð hér að ofan að hrein Nash-jafnvægi (að gefnu K) geta aðeins myndast í (F, A) og (N, I). Nash-jafnvægi í blönduðum áætlunum skila væntum umframábata sem ætti að vera nálægt umframábata við áætlun (F,A). Augljóst er að ef engin hætta er á inngöngu mun gamla fyrirtækið nýta sér einokunaraðstöðu sína og velja á milli F og N eftir því hvar einokunarhagnaður er hærri að gefnu K. Ef hætta er á inngöngu er til staðar velur gamla fyrirtækið út frá öðrum forsendum þ.e. væntri hagnaðarbreytingu vegna inngöngu. Hættan á inngöngu verður til þess (í þessu dæmi) að gamla fyrirtækið er líklegra til að fjárfesta en ekki og því verður væntur neytendaábati hærri.

Samantekt: Almennt gildir að ekki sé nauðsynlegt að nýtt fyrirtæki komi inn á einkasölumarkað til þess að hagur neytenda batni. Stundum getur verið nægjanlegt að hættan á inngöngu sé til staðar.

2.6 Nash-jafnvægi m.v. samhverfar upplýsingar

Ef við gerum ráð fyrir því að upplýsingar séu samhverfar getur inngöngufyrirtækið tekið ákvörðun sína eftir að gamla fyrirtækið tekið fjárfestingarákvörðun sína. Setjum upp leikinn á „extensive form":



Á myndinni eru ráðandi áætlanir inngöngufyrirtækisins merktar sérstaklega. Gamla fyrirtækið velur því á milli þess að velja F og hagnast $35 - K$ eða velja

N og hagnast 11. Áætlanirnar (F, A) eru Nash-jafnvægi ef $K < 24$.Ef $K > 24$ er (N, I) Nash-jafnvægi. Ef $K = 24$ þá eru (F, A) og (N, I) bæði Nash-Jafnvægi. Við sjáum hér að ef gamla fyrirtækið væri eitt á markaðnum myndi það fjárfesta ef $K < 35 - 16$, þ.e. $K < 18$. Það eru því minni líkur á því að gamla fyrirtækið fjárfesti í R&Þ ef engin hætta er á inngöngu. Þetta er nokkurnveginn sama niðurstaða og fékkst í dæmi ósamhverfra upplýsinga.