

Heimadæmi 7

Sigurgeir Örn Jónsson - kt: 280674-5919

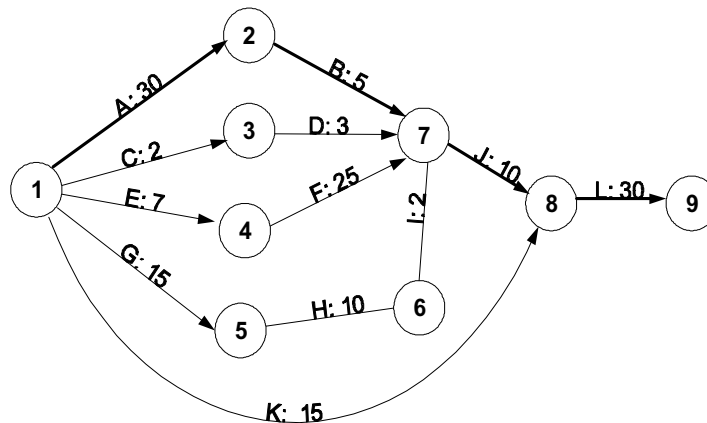
Kennari: Páll Jensson

15. október 1996

1 CPM

1.1 Formleg framsetning á teikningu

Skipuleggja þarf bakstur á lasagna. Lista yfir verkþætti má finna í kennslubók á bls 414. Setjum verkefnið upp skipulega þar sem að atburðir (*e. events*) eru settir fram með hringjum en verkþættir (*e. activities*) settir fram með örvum:



Verkefnið hefst á atburði 1 og lýkur á atburði 9 þegar að öllum verkþáttum er lokið. Bókstafir á örvum eru einkenni atburða og tölur þar við hlið tákna þann tíma sem hver verkþáttur tekur.

1.2 Critical path

1.2.1 Fyrsti tími

Fyrsti tími fyrir atburð er sá (vænti) tími sem að atburður á sér stað ef að byrjað hefur verið á fyrri verkþáttum eins fljótt og kostur er. Fyrsta tíma má finna með því að rúlla áfram í gegn um CPM netið:

Atburður	Undanfari	Fyrsti tími. + atburðart	Fyrsti tími = max
1	–	–	0
2	1	$0 + 30 = 30$	30
3	1	$0 + 2 = 2$	2
4	1	$0 + 7 = 7$	7
5	1	$0 + 15 = 15$	15
6	5	$15 + 10 = 25$	25
7	2	$30 + 5 = 35$	35
	3	$2 + 3 = 5$	
	4	$7 + 25 = 32$	
	6	$25 + 2 = 27$	
8	7	$35 + 10 = 45$	45
	1	$0 + 15 = 15$	
9	8	$45 + 30 = 75$	75

Við sjáum af þessu að hægt er að baka réttinn á 75 mínútum m.v. að verkið sé skipulagt með réttum hætti.

1.2.2 Síðasti tími

Síðasti tími atburðar er (væntur) síðastu tími sem að atburður getur átt sér stað án þess að verklokum seinki frá fyrsta mögulega tíma. Við finnum gildi síðasta tíma með því að rekja okkur aftur á bak í gegn um netið.

Atburður	Eftirfari	Síðasti tími - verkþ.tími	Síðasti tími = min
9	–	–	75
8	9	$75 - 30 = 45$	45
7	8	$45 - 10 = 35$	35
6	7	$35 - 2 = 33$	33
5	6	$33 - 10 = 23$	23
4	7	$35 - 25 = 10$	10
3	7	$35 - 3 = 32$	32
2	7	$35 - 5 = 30$	30
1	2	$30 - 30 = 0$	0
	3	$32 - 2 = 30$	
	4	$10 - 7 = 3$	
	5	$23 - 15 = 8$	
	8	$45 - 15 = 30$	

1.2.3 Slakar

Við getum fundið slaka á atburðum með því að draga fyrsta tíma frá síðasta tíma:

Atburður	Slaki
1	$0 - 0 = 0$
2	$30 - 30 = 0$
3	$32 - 2 = 30$
4	$10 - 7 = 3$
5	$23 - 15 = 8$
6	$33 - 25 = 8$
7	$35 - 35 = 0$
8	$45 - 45 = 0$
9	$75 - 75 = 0$

Við getum einnig fundið slaka á verkþáttum með $L_j - (E_i + t_{ij})$ þar sem að L_j er síðasti tími atburðar j , E_i er fyrsti tími atburðar i og t_{ij} er væntur tími verkþáttar (i, j) . Setjum upp í töflu:

Verkþáttur	Slaki
$1 \rightarrow 2$	$30 - (0 + 30) = 0$
$1 \rightarrow 3$	$32 - (0 + 2) = 30$
$1 \rightarrow 4$	$10 - (0 + 7) = 3$
$1 \rightarrow 5$	$23 - (0 + 15) = 8$
$5 \rightarrow 6$	$33 - (15 + 10) = 8$
$2 \rightarrow 7$	$35 - (30 + 5) = 0$
$3 \rightarrow 7$	$35 - (2 + 3) = 30$
$4 \rightarrow 7$	$35 - (7 + 25) = 3$
$6 \rightarrow 7$	$35 - (25 + 2) = 8$
$7 \rightarrow 8$	$45 - (35 + 10) = 0$
$1 \rightarrow 8$	$45 - (0 + 15) = 30$
$8 \rightarrow 9$	$75 - (45 + 30) = 0$

1.2.4 Critical path

Vitum að slaki verkþátta á critical path er ávallt núll. Critical path er því $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9)$ eins og sjá má út frá ofangreindri töflu.

1.3 Truflun

Vegna símtals tefst niðurskurður lauka og sveppa (verkþáttur E, þ.e. $1 \rightarrow 4$) um 6 mínútur. Við sjáum út frá ofangreindri töflu að slaki á þessum verkþætti er 3. Við getum því lengt verkþáttinn um 3 mínútur án þess að breyta heildartíma verkefnis. Eftir að þessar 3 mínútur eru nýttar liggur þessi verkþáttur á nýjum critical path og heildartími verkefnis lengist við lengingu verkþáttatíma. Heildartöf á verkefninu vegna umrædds símtals er því $6 - 3 = 3$ mínútur. Ef að matarvél er notuð sem lækkar skurðartíma frá 7 mín. niður í 2 mín. þá eykst slakinn að öðru óbreyttu því sem nemur lækkuninni, þ.e. fer upp í 8. Ef að 6 mínútna símtal kemur þá breytist heildartími verkefnis ekki þar sem slakinn leyfir lengingu verkþáttar um allt að 8 mínútur.

2 PERT

2.1 Vongildi og staðalfrávik

Höfum verkefni þar sem að búið er að áætla tíma hvers verkþáttar út frá bjartsýnu-, líklegu- og svartsýnu-mati. Gerum ráð fyrir því að sá tími sem hver verkþáttur þarfnast sé dreifður með beta-dreifingunni. Vongildi (*e. expected value*) tíma hvers verkþáttar verður því:

$$t_e = \frac{1}{3} \left[2m + \frac{1}{2}(a + b) \right]$$

þar sem að m er líklegasta mat, a er bjartsýnismat og b er svartsýnismat. Dreifni (*e. variance*) verður eftirfarandi:

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}(b - a) \right]^2$$

og staðalfrávikid verður:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{6}(b - a)$$

Setjum upp töflu þar sem að vongildi, dreifni og staðalfrávik er reiknað fyrir hvern atburð:

Atburður	Bjartsýnis- mat	Líklegasta mat	Svartsýnis- mat	Vongildi	Dreifni	Staðal- frávik
1 → 2	28	32	36	32	$\left[\frac{4}{3}\right]^2 = 1.78$	$\frac{4}{3}$
1 → 3	22	28	32	$\frac{83}{3}$	$\left[\frac{5}{3}\right]^2 = 2.78$	$\frac{5}{3}$
2 → 6	26	36	46	36	$\left[\frac{10}{3}\right]^2 = 11.11$	$\frac{10}{3}$
3 → 4	14	16	18	16	$\left[\frac{2}{3}\right]^2 = .44$	$\frac{2}{3}$
3 → 5	32	32	32	32	$0^2 = 0$	0
3 → 6	40	52	74	$\frac{161}{3}$	$\left[\frac{17}{3}\right]^2 = 32.11$	$\frac{17}{3}$
4 → 5	12	16	24	$\frac{50}{3}$	$2^2 = 4$	2
5 → 6	16	20	26	$\frac{61}{3}$	$\left[\frac{5}{3}\right]^2 = 2.78$	$\frac{5}{3}$
5 → 7	26	34	42	$\frac{102}{3}$	$\left[\frac{8}{3}\right]^2 = 7.11$	$\frac{8}{3}$
6 → 7	12	16	30	$\frac{53}{3}$	$3^2 = 9$	3

2.2 Critical path

Næsta skref er að finna "critical path" verkefnisins. Hann finnum við með því að nota aðferð CPM á vongildi verkþáttanna, þ.e. finnum þá verkþætti sem hafa engann slaka. Leiðum út töflu fyrir fyrsta tíma:

Atburður	Undanfari	Fyrsti tími + atburðart.	Fyrsti tími = max
1	–	–	0
2	1	$0 + 32 = 32$	32
3	1	$0 + 83/3 = 83/3$	$83/3$
4	3	$83/3 + 16 = 131/3$	$131/3$
5	4	$131/3 + 50/3 = 181/3$	$181/3$
6	2	$32 + 36 = 68$	$244/3$
	3	$83/3 + 161/3 = 244/3$	
	5	$181/3 + 61/3 = 242/3$	
7	6	$244/3 + 53/3 = 99$	99
	5	$181/3 + 102/3 = 283/3$	

aðra töflu fyrir síðasta tíma:

Atburður	Eftirfari	Síðasti tími - atburðart.	Síðasti tími = min
7	–	99	99
6	7	$99 - 53/3 = 244/3$	$244/3$
5	6	$244/3 - 61/3 = 61$	61
	7	$99 - 102/3 = 65$	
4	5	$61 - 50/3 = 133/3$	$133/3$
3	6	$244/3 - 161/3 = 83/3$	$83/3$
	5	$61 - 32 = 29$	
	4	$133/3 - 16 = 85/3$	
2	6	$244/3 - 36 = 136/3$	$136/3$
1	2	$136/3 + 96/3 = 40/3$	0
	3	$83/3 - 83/3$	

og að lokum töflu fyrir slaka atburða. Með því að skoða slakana sjáum við að eftirfarandi verkþættir hafa slaka núll og mynda þeir því critical path:

Verk	Slaki
1 → 3	$83/3 - (0 + 83/3) = 0$
3 → 6	$244/3 - (83/3 + 161/3) = 0$
6 → 7	$99 - (244/3 + 53/3) = 0$

2.3 Verklok

Vongildi þess tíma sem tekur að klára verkefnið er summa vongilda þeirra verka sem eru á critical path:

$$E(t_p) = t_{1,3} + t_{3,6} + t_{6,7} = \frac{83}{3} + \frac{161}{3} + \frac{53}{3} = 99$$

Dreifni verkefnisins er á sama hátt summa dreifni hvers verkþáttar á critical path:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{3,6}^2 + \sigma_{6,7}^2 \\ &= \left[\frac{5}{3} \right]^2 + \left[\frac{17}{3} \right]^2 + 9 \approx 43.889 \end{aligned}$$

Staðalfrávik er því:

$$\sigma_p = \sqrt{\left[\frac{5}{3}\right]^2 + \left[\frac{17}{3}\right]^2} + 9.0 \approx 6.6249$$

Verkið á að klárast á 100 vikum. Líkurnar á því að hægt verði að standa við þá skuldbindingu má finna með því að gera ráð fyrir því að heildartími sé normaldreifður:

$$\begin{aligned} P(t_p \leq 100) &= P\left(\frac{t_p - E(t_p)}{\sigma_p} \leq \frac{100 - E(t_p)}{\sigma_p}\right) \\ &= F\left(\frac{100 - E(t_p)}{\sigma_p}\right) = F\left(\frac{100 - 99}{6.6249}\right) \\ &= F(.15095) = 55.9992\% \end{aligned}$$

Þ.e. 56% líkur eru á því að hægt verði að klára verkið á tilsettum tíma.