Heimadæmi 3
Aðgerðargreining A

Sigurgeir Örn Jónsson- kt:280674-5919
Kennari: Páll Jensson

19. september 1996

1 Lausn á bestunarvandamáli (f)

Eftirfarandi bestunarvandamál þarf að leysa með SIMPLEX:

$$\begin{array}{rc} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ m.t.t & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \end{array}$$

Bætum við slakbreytum s_1, s_2, s_3 en þá má umrita vandamálið yfir í eftirfarandi jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 &= 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 80 \\ x_1 + s_3 &= 40 \end{aligned} \tag{1}$$

Setjum vandamálið upp í SIMPLEX töfluform samkvæmt hefðbundnum hætti:

Grunn-breyta	Jafna	Stuðull z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Hægri hlið
z	[0]	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	[1]	0	2	1	1	0	0	100
s_2	[2]	0	1	1	0	1	0	80
s_3	[3]	0	1	0	0	0	1	40

Augljóst er að þessi lausn er ekki besta lausn þar sem að stuðlar x_1 og x_2 eru neikvæðir í jöfnu [0]. Sú breyta sem valin er í grunn er sú sem hefur lægsta stuðul í jöfnu [0], þ.e. x_1. Sú breyta sem valin er út úr grunni er grunnbreyta þeirrar raðar sem skilar lægstu hlufallsprófi (*e. minimum ration test*). Í þessu tilfelli er það slakbreytan s_3 eins og sjá má að eftirfarandi töflu.

Grunn-breyta	Jafna	Stuðull z	x_1	x_2	s_1	s_2	$s_3 \downarrow$	Hægri hlið	Hlutfalls próf
z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	0	
s_1	(1)	0	2	1	1	0	0	100	
s_2	(2)	0	1	1	0	1	0	80	$80/1 = 80$
$\leftarrow s_3$	(3)	0	1	0	0	0	1	40	$40/1 = 40$ $\leftarrow$min

Með einföldum algebruaðgerðum (leggja saman margfeldi raðar [2] við aðrar raðir) fáum við út eftirfarandi töflu:

Grunn-breyta	Jafna	Stuðull z	x_1	$x_2\downarrow$	s_1	s_2	s_3	Hægri hlið	Hlutfalls próf
z	(0)	1	0	-2	0	0	3	160	
$\leftarrow s_1$	(1)	0	0	1	1	0	-2	20	$20/1 = 20 \leftarrow$min
s_2	(2)	0	0	1	0	1	-1	40	$40/1 = 40$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	1	40	

Nú er það x_2 sem fer inn í grunn og s_1 út úr grunni. Umritum töflu á nýjan leik:

Grunn-breyta	Jafna	Stuðull z	x_1	x_2	s_1	s_2	$s_3\downarrow$	Hægri hlið	Hlutfalls próf
z	(0)	1	0	0	2	0	-1	200	
x_2	(1)	0	0	1	1	0	-2	20	
$\leftarrow s_2$	(2)	0	0	0	-1	1	1	20	$20/1 = 20 \leftarrow$min
x_1	(3)	0	1	0	0	0	1	40	$40/1 = 40$

Að lokum fer s_3 inn í grunn og s_2 út úr grunni og eftir umritun fáum við lokatöfluna:

Grunn-breyta	Jafna	Stuðull z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Hægri hlið
z	(0)	1	0	0	1	1	0	180
x_2	(1)	0	0	1	-1	2	0	60
s_3	(2)	0	0	0	-1	1	1	20
x_1	(3)	0	1	0	1	-1	0	20

Þessi tafla er einmitt sama taflan og birt var sem lokatafla í verkefnalýsingu. Röðun raða er eilítið frábrugðin en útkoman er sú sama.

2 Breytingar á söluverði tindáta (a)

2.1 Range

Setning 1 *Grunnur og besta lausn verða þau sömu og í lið 1 svo lengi sem söluverð tindáta* (x_1) *er á milli \$2 og \$4 (að öðru óbreyttu).*

Sönnun. Við vitum samkvæmt endurbættu SIMPLEX aðferðinni (*e. revised Simplex*) að

$$y = c_B B^{-1} \tag{2}$$

Í lausn bestunarvandamálsins voru grunnbreyturnar x_2, s_3 og x_1. Skilgreinum því $x_B = (x_2, s_3, x_1)$ og

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sú kvöð er á þessu fylki að allar breytur í y vektornum séu stærri en eða jafnar núlli. Stingum inn breytu sem við köllum c_1 í stað stuðuls x_1 í c_B vektornum og reiknum út y.

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + c_1 & 4 - c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stök y mega ekki vera minni en núll þannig að $c_1 \in [2, 4]$

■

2.2 Nýtt söluverð

Í verkefnislýsingu er spurt um nýja bestunarlausn ef að söluverð tindáta er \$3.5. Hér að ofan var sýnt fram á að grunnbreytur bestu lausnar eru þær sömu og í lið 1 svo lengi sem $c_1 \in [2, 4]$. Þar sem \$3.5 er á þessu bili er besta lausn m.v. söluverð \$3.5 sama lausn og í lið 1.

3 Breytingar á söluverði lesta (b)

Setning 2 *Grunnur og besta lausn verða þau sömu og í lið 1 svo lengi sem söluverð lesta er á milli \$1.5 og \$3.00.*

Sönnun. Þar sem við göngum út frá upprunalega vandamálinu er B^{-1} fylkið það sama og í (3). Stingum inn breytu sem við köllum c_2 í stað stuðuls x_1 í c_B vektorinn (4), þ.e. $c_B \equiv \begin{bmatrix} c_2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ og reiknum út y samkvæmt (2):

$$y = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 + 3 & 2c_2 - 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Öll stök y fylkisins verða að vera stærri en eða jöfn núlli til þess að lausnin verði áfram besta lausn, þ.e. söluverð lesta verður að vera á bilinu $c_2 \in [2\ ,\ 1.5]$

■

4 Klukkustundir aflögu vegna lokafrágangs (c)

4.1 Range

Setning 3 *Grunnur og besta lausn verða þau sömu og í lið 1 svo lengi sem klst til aflögu vegna lokafrágangs (e. finishing) eru á milli 80 og 120 klst.*

Sönnun. Endurbætta Simplex aðferðin segir að:

$$x_B = B^{-1} b \tag{5}$$

en $x_B \geq 0$ samkv. forsendu. Dálkurinn b er einfaldlega dálkur hægri-hliðar gilda í hliðarskilyrðum, þ.e.:

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Til þess að kanna næmni frágangsskilyrðisins stingum við breytu sem við köllum b_1 inn í efstu línu b vektorsins, þ.e.:

$$b \equiv \begin{bmatrix} b_1 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Vektorinn x_B verður því samkv. (5):

$$x_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 + 160 \\ -b_1 + 120 \\ b_1 - 80 \end{bmatrix}$$

Þar sem öll stök fylkisins verða að vera jákvæð svo að lausn úr lið 1 sé besta lausn verða klukkustundir aflögu að vera á bilinu $b_1 \in [80, 120]$

■

4.2 Nýtt söluverð

Í verkefnislýsingu er spurt um nýja bestunarlausn ef að 90 klst eru til aflögu vegna lokafrágangs.Hér að ofan var sýnt fram á að grunnbreytur bestu lausnar eru þær sömu og í lið 1 svo lengi sem $b_1 \in [80, 120]$. Þar sem 90 klst eru á þessu bili er besta lausn sú sama og í lið 1.

5 Eftirspurn eftir tindátum (d)

Setning 4 *Grunnur og besta lausn verða þau sömu og í lið f svo lengi sem eftirspurn eftir tindátum er a.m.k. 20.*

Sönnun. Stingum breytu inn í b fylkið sem við köllum b_3:

$$b \equiv \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Leiðum út á ný vektorinn x_B samkvæmt (5):

$$x_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -20 + b_3 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Stök x_B fylkisins eru jákvæð svo lengi sem $b_3 \geq 20$.

■

6 Ný framleiðsluvara - leikfangabátar

Til athugunar er að hefja framleiðslu á leikfangabátum. Framleiðsla á einum leikfangabát krefst 2 smíðavinnustunda og 1 klst. vegna frágangsvinnu. Eftirspurn eftir leikfangabátum er ótakmörkuð (m.v. það söluverð sem haft er í huga). Hér skal kannað hvort hagkvæmt sé að framleiða leikfangabáta ef að söluverð þeirra er \$3.5. Þessar forsendur má setja upp:

$$
\begin{aligned}
c_N &= 3.5 \\
a_N &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ef að framleiðsla á að vera vænleg verður eftirfarandi að gilda samkv. endurskoðaðri Simplex aðferð:

$$
y \cdot a_i - c_j \geq 0 \tag{6}
$$

Könnum ójöfnuna út frá hinni nýju vöru (N):

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3.5 = -0.5 \ngeq 0
$$

Niðurstaða: Miðað við ofangreindar forsendur er framleiðsla á leikfangabátum **ekki** vænleg.