

# Aðgerðagreining A

Sigurgeir Örn Jónsson

Haust 1996

# Efnisyfirlit

<b>1</b>	<b>Línuleg bestun</b>	<b>3</b>
1.1	Uppsetning vandamáls . . . . .	3
1.2	Lausn vandamáls . . . . .	4
1.2.1	Lausnaraðferð í nokkrum skrefum . . . . .	4
1.2.2	Lausnaraðferð með hjálp töflu. . . . .	4
1.3	Nokkur útfærsluatriði . . . . .	6
1.3.1	Jafntefli þegar breyta er valin í grunn . . . . .	6
1.3.2	Jafntefli þegar breyta er valin úr grunni ( <i>e. degeneracy</i> ) . . . . .	6
1.3.3	Engin breyta úr grunni . . . . .	6
1.3.4	Margar lausnir . . . . .	6
1.3.5	Jafnaðarmerki - aðferð stóra M . . . . .	6
1.4	Endurskoðuð Simplex aðferð . . . . .	8
1.4.1	Formleg framsetning . . . . .	8
1.4.2	Lausn . . . . .	8
1.4.3	Samantekt . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Næmnisgreining<sup>1</sup></b>	<b>11</b>
2.0.4	Breyting á stuðli ógrunnbreytu í markfalli . . . . .	11
2.0.5	Breytingar á stuðli grunnbreytu í markfalli. . . . .	11
2.0.6	Breytingar á stuðlum hægri hliðar í skorðum . . . . .	12
2.0.7	Ný starfsemi . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Flutningafræði</b>	<b>13</b>
3.1	Algrím fyrir lausn . . . . .	13
3.2	Sýnidæmi . . . . .	13
3.3	Aðferð Vogels . . . . .	15
3.4	Úthlutunarvandamál (assignment problem) . . . . .	16
3.4.1	Ungverska aðferðin . . . . .	17
3.5	Niðurskurður - dæmi . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Netlíkön</b>	<b>18</b>
4.1	Minnsta spönn (spannartré) . . . . .	18
4.2	Stysta leið ( <i>e. shortest path</i> ) . . . . .	19
4.3	Mesta flæði ( <i>e. maximal flow</i> ) . . . . .	19
4.4	Önnur líkön . . . . .	19
4.5	Línuleg bestun . . . . .	20

<sup>1</sup>Samantekt næmnisgreiningar má sjá á töflu 5.8 á bls 196 í *Wayne L. Winston: "Operations Research: Applications and Algorithms"*

4.6	CPM . . . . .	20
4.6.1	Fyrsti tími . . . . .	20
4.6.2	Síðasti tími . . . . .	21
4.6.3	Slaki atburðar . . . . .	21
4.6.4	Slaki verkþáttar . . . . .	21
4.6.5	Critical path . . . . .	21
4.7	PERT . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Heiltölubestun</b>	<b>22</b>
5.1	Dæmifjárfestingar . . . . .	22
5.1.1	Náskylt dæmi: Námsval . . . . .	22
5.1.2	Dæmi: Staðarval . . . . .	23
5.1.3	Dæmi: lotuskipulag (uppsetningartími) . . . . .	23
5.2	Branch and Bound . . . . .	24
5.2.1	Samantekt . . . . .	24
5.2.2	Assignment (úthlutun): . . . . .	25

# Kafli 1

## Línuleg bestun

### 1.1 Uppsetning vandamáls

Uppsetning línulegs bestunarvandamáls felst í eftirfarandi skrefum:

**Stuðlar líkans ákvarðaðir**

Í upphafi eru allir þættir sem snerta viðkomandi vandamál teknir saman og stuðlar ákvarðaðir

**Ákvörðunarbreytur (variables) skilgreindar**

Þær breytur sem velja á sem stýribreytur skilgreindar

**Markfall (Objective function) skilgreind**

**Vandamál sett fram með formlegum hætti (formulering)**

Hliðarskilyrði línulegs vandamáls afmarka af ákveðið lausnarrými (feasible region). Þar sem bæði markfall og hliðarskilyrði eru línuleg er augljóst að besta lausn hlýtur að vera í einhverjum hornpunkti lausnarrýmisins.

Fyrsta skref lausnar byggir á því að umbreyta ójöfnuskilyrðum yfir í jöfnuskilyrði með því að bæta inn svokölluðum slakabreytum. Grunnlausn hefur eftirfarandi eiginleika:

Hver breyta er annað hvort innan grunns eða utan grunns

Fjöldi grunnbreyta er jafn fjölda hliðarskilyrða

Breytur utan grunns eru settar jafnar núllu

Gildi grunnbreyta eru lausnir á jöfnukerfi

Ef grunnbreyturnar uppfylla ójöfnuskilyrðin er grunnlausnin BF (Basic feasible) lausn

Tvær BF lausnir eru við hlið hvor annarrar ef allar breytur sem ekki eru í grunni eru þær sömu nema ein.

## 1.2 Lausn vandamáls

### 1.2.1 Lausnaraðferð í nokkrum skrefum

Lausnaraðferð línulegs bestunarvandamáls með SIMPLEX má skipta niður í eftirfarandi þrep:

□ **Uppsetning (e. initialization)**

Slakastærðin eru valdar til þess að vera grunnbreytur í upphafi en aðrar breytur eru hafðar utan grunns og hafa því gildið núll. Með þessari uppsetningu má sjá upphafsgildi BF lausnar beint út frá jöfnukerfinu.

□ **Hámörkunarpróf**

Ef að stuðlar í markfallinu eru neikvæðir (þ.e. aukning einnar breytu eykur Z) þá er viðkomandi BF lausn ekki hámarkslausn þar sem hægt er að gera betur með því að breyta stýristærðum. Það verður því að finna heppilega adjacent BF lausn og kanna hvort hún sé hámark.

□ **Í hvaða átt á að fara (skref 1 í ítrekun)**

Það að auka gildi ógrunnbreytu hefur mismikil áhrif á markfallið eftir því hvaða breytu er um að ræða. Það er í flestum tilfellum heppilegast að velja þá ógrunnbreytu sem skapar mesta jaðaraukningu á markfallinu, þ.e. þá breytu sem hefur stuðul með hæstu mínustöluna. Sú breyta er því sögð fara **inn í grunn**.

□ **Hvar á að stoppa**

Næst kemur upp sú spurning hvað megi auka ofangreinda breytu um mikið áður en að næsta hornpunkti er náð. Skilyrðið að vera inn í lausnarrúmi þýðir að hliðarskilyrði verða að vera uppfyllt þ.á.m að allar breytur séu pósítívar (eða núll). Það hvað auka má ofangreinda breytu um mikið byggir á því hvar við rekumst næst á hliðarskilyrði. Hvert hliðarskilyrði fyrir sig tekið fyrir og reiknað út hvað hin nýja breyta getur verið með hæsta móti. Lægsta talan verður nýja gildi inngöngubreytunnar og sú breyta sem verður núll í þeirri jöfnu fer út úr grunni.

□ **Leyst út fyrir nýrri BF lausn**

Umbreytum jöfnukerfinu þannig að hver grunnbreyta er aðeins í einni jöfnu og hefur stuðulinn 1 í þeirri jöfnu.

Þegar hér er komið er hámrkunarpróf endurtekið og haldið áfram með sömu skref þangað til lausn er fundin.

### 1.2.2 Lausnaraðferð með hjálp töflu.

□ **Uppsetning (e. initialization)**

Vandamál sett upp sem jöfnuhneppi. Slakbreytum bætt inn í þannig að breyta megi ójöfnumerkjum í jafnaðarmerki. Jöfnuhneppið er síðan fært inn í töflu þannig að ein jafna sé í hverri röð og í hverjum dálki séu allir stuðlar við tiltekna breytu. Hver röð er tengd ákveðinni grunnbreytu, þ.e. að stuðull grunnbreytunnar í röðinni er einn en núll í öllum öðrum röðum.

Upphafstaflan lítur þá svona út fyrir Wyndor Glass Co. vandamálið:

(a) algebraískt form				(b) töfluform								
				Grunn- breyta	Jafna	Stuðull					Hægri hlið	
						Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>		x <sub>5</sub>
(0)	$Z - 3x_1 - 5x_2$	$=$	0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
(1)	$x_1 + x_3$	$=$	4	x <sub>3</sub>	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2)	$2x_2 + x_4$	$=$	12	x <sub>4</sub>	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3)	$3x_1 + 2x_2 + x_5$	$=$	18	x <sub>5</sub>	(3)	0	3	2	0	0	1	18

□ **Hámörkunarpróf**

Ef að stuðlar markfallsins eru allir jákvæðir<sup>1</sup> þá er ekki hægt að bæta lausnina frekar og hámarki er náð. Ef a.m.k. einn stuðull er neikvæður þá er til betri lausn.

□ **Í hvaða átt á að fara**

Ef hægt er að velja á milli nokkurra hliðstæðra hornpunkta borgar sig að velja þann sem skilar mestri jaðaraukningu á gildi markfallsins, þ.e. velja þá breytu sem hefur lægstan stuðul. Sú breyta er þá sögð fara inn í grunn þar sem að hún tekur jákvætt gildi.

□ **Hvar á að stoppa**

Hér kemur að skilyrðinu að allar breytur eigi að vera jákvæðar. Ef að gildi breytunnar er aukið og aukið kemur að því að einhver grunnbreyta verður núll og er sú breyta þá sögð fara úr grunni enda getur hún ekki lækkað meira. Þessi breyta er fundin með því að deila hægri hlið hverrar jöfnu með stuðlinum í pivot dálknum og velja þá röð (og þar með þá breytu) sem skilar lægstu gildi. Í ofangreindu dæmi er það því  $x_4$  sem fer út úr grunni eins og sjá má á meðfylgjandi töflu:

Grunn- breyta	Jafna	Stuðull						Hægri hlið	Hlutfalls próf
		Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>		
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
x <sub>3</sub>	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x <sub>4</sub>	(2)	0	0	2	0	1	0	12	12/2=6 ←min
x <sub>5</sub>	(3)	0	3	2	0	0	1	18	18/2=9

□ **Leyst út fyrir nýrri BF lausn**

Skiptum út nýju grunnbreytunni með þeirri sem fara á út í grunnbreytudálknum. Síðan verðum við að beita algebra þannig að stuðull grunnbreytunnar í sinni röð verði einn og stuðlar grunnbreytu í öðrum línunum verði 0. Við byrjum t.d. á því að deila grunnbreyturöðinni með gildi grunnbreytunnar og leggjum svo við eða drögum frá margfeldi grunnbreyturaðarinnar við aðrar raðir. Þegar þessu er lokið lítur hin nýja tafla út svona:

<sup>1</sup>Ástæðan fyrir því að hér er talað um jákvæða stuðla en ekki neikvæða er sú að búið er að færa þá yfir jafnaðarmerki. Þ.e. ef að stuðull er jákvæður veldur hækkun grunnbreytu lækkan gildis markfallsins.

Grunn- breyta	Jafna	Stuðull						Hægri hlið
		Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	
Z	(0)	1	-3	-5	0	5/2	0	30
x <sub>3</sub>	(1)	0	1	0	1	0	0	4
x <sub>2</sub>	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
x <sub>5</sub>	(3)	0	3	0	0	-1	1	6

Hámörkunarpróf er svo endurtekið og ofangreind skref sömuleiðis þangað til að hámarki er náð.

## 1.3 Nokkur útfærsluatriði

### 1.3.1 Jafntefli þegar breyta er valin í grunn

Eitt skref Simplex algrímsins er að velja þá breytu sem á að fara inn í grunn. Stundum kemur það fyrir að tvær breytur eru jafn-fýsilegar, þ.e. hafa báðar sama neikvæða stuðul í markfallinu. Lausn á þessu er sú að það skiptir ekki máli hvor breytan en valin, SIMPLEX finnur á endanum hina bestu lausn.

### 1.3.2 Jafntefli þegar breyta er valin úr grunni (*e. degeneracy*)

Þegar tvær breytur eru jafn-fýsilegar til að fara úr grunni skiptir máli, fræðilega séð, hvor þeirra sé valin. Ef röng breyta er valin er hætta á því að það myndist lykkja í Simplex algríminu. Sem betur fer er þetta tilvik mjög sjaldgæft í praktískum verkefnum. Ef þetta vandamál kemur upp er eina ráðið að rekja sig til baka og velja aðra breytu úr grunni þar sem um "jafntefli" er að ræða.

### 1.3.3 Engin breyta úr grunni

Sá möguleiki er fyrir hendi að engin breyta henti til þess að fara úr grunni. Slíkt á sér stað þegar gildi breytunnar sem fer í grunn getur vaxið óendanlega án þess að nokkrar non-grunnbreytur fái neikvætt gildi. Í töfluformi þýðir þetta að sérhver stuðull í pivot dálknum (fyrir utan röð 0) er annaðhvort neikvæður eða 0.

Ástæðan fyrir þessu fyrirbæri er ranglega skilgreint vandamál, þ.e. Z (gildi markfallsins) er óskilyrt og getur því vaxið endalaust.

### 1.3.4 Margar lausnir

Vandamál getur haft óendanlega margar lausnir ef hallatala markfallsins er sú sama og hallatala skilyrðis í punktum bestu lausnar. Þegar um margar lausnir er að ræða finnur Simplex algrímið aðeins eina þeirra. Það er því viturlagt að athuga í lokapunkti hvort um fleiri lausnir er að ræða.

### 1.3.5 Jafnaðarmerki - aðferð stóra M

Þegar jafnaðarmerki er í einhverju hliðarskilyrðinu má rita almennt umrita það á eftirfarandi hátt:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (1.1)$$

yfir í:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1.2)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (1.3)$$

Þessi umritun hefur þó þann galla að ekki reynist hægt að finna upphafshornpunkt til þess að hefja keyrslu Simplex algrímsins. Þennan vanda má leysa með því að mynda gervivandamál (*e. artificial problem*). Ný óneikvæð breyta er kynnt til sögunnar sem lítur alveg eins út og slakabreyta.

- Þessari breytu er bætt við það hliðarskilyrði sem inniheldur jafnaðarmerki.
- Þessi breyta má ekki taka jákvætt gildi og því er breytan margfölduð með stuðlinum  $M$  dregin frá markfallinu.  $M$  er hér látið tákna mjög stóra jákvæða tölu. Dæmi um nýtt markfall er:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 \quad (1.4)$$

Nú má leysa vandamálið með Simplex án nokkura vankvæða. Þessi aðferð er þó notuð m.a. til þess að leiðrétta fyrir annars konar sértílfellum, eins og t.d. þegar ójöfnumerki er öfugt. Draga má almennu aðferð stóra  $M$ s saman í eftirfarandi skref:

- **Breyta skorðum þannig að hægri hlið sé óneikvæð.**  
Margfalda verður allar skorður með óneikvæðum hægri handar stuðlum með mínus einum. Við slíka aðgerð snýst ójöfnumerkið við og því verður að leiðrétta fyrir því. Þessi leiðrétting er gerð sérstaklega í skrefi 3
- **Umrita ójöfnuskilyrði í staðlað form**  
Ef skorða  $i$  hefur  $\leq$  skilyrði er bætt við slakabreytu  $s_i$  og ef skorða  $i$  hefur  $\geq$  skilyrði þá drögum við frá umframbreytu.
- **Leiðrétting á skrefi 1**  
Ef skorða  $i$  hefur  $\geq$  skilyrði eða jafnaðarskilyrði er gervibreytu (*e. artificial variable*)  $a_i$  bætt við.
- **Stóra  $M$**   
Lát  $m$  tákna mjög stóra tölu. Ef um lágmarkarvandamál er að ræða er  $Ma_i$  bætt við markfallið fyrir hverja gervibreytu. Ef um hámarkarvandamál er  $-Ma_i$  bætt við markfallið.
- **Upphafslaun**  
Þar sem allar gervibreytur byrja í grunni þarf að fjarlægja þær úr röð 0 (röð markfallsins) áður en Simplex aðferðin er keyrð.

Ef allar gervibreytur eru jafnar núlli í bestu laun þá höfum við fundið bestu laun upprunalega vandamálsins. Ef einhverjar gervibreytur eru jákvæðar í bestu laun þá er upprunalega vandamálið infeasible.

Þegar gervibreyta fer út úr grunni má eyða dálk hennar í áframhaldandi töflum. Ástæðan fyrir þessu er sú að tilgangur gervibreytu er eingöngu að fá fram upphafslaun. Þegar gervibreyta fer út úr grunni höfum við enga þörf fyrir hana meir.

## 1.4 Endurskoðuð Simplex aðferð

### 1.4.1 Formleg framsetning

Formleg framsetning á línulegu bestunarvandamáli er eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \text{MAX} \quad & Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{m.t.t.} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

þar sem að  $\mathbf{c}$  er raðvektor

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{0}$  eru dálkvektorur þannig að:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

og  $\mathbf{A}$  er fylkið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Til þess að fá fram umbreytt form vandamálsins kynnum við til sögunnar dálkvektor slakabreyta:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Þannig að hliðarskilyrðin verða:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

þar sem að  $\mathbf{I}$  er  $m \times m$  einingarfylki og vektorinn  $\mathbf{0}$  hefur nú  $n + m$  stök.

### 1.4.2 Lausn

Einn lykileiginleiki endurskoðuðu Simplex aðferðarinnar er sá að mögulegt er að leysa beint út fyrir hverri BF lausn eftir að hafa greint í sundur grunnbreytur frá ógrunnbreytum.

Veljum dálka úr  $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$  fylkinu og búum til nýtt fylki fyrir grunnbreytur  $B$  og annað fyrir non-grunnbreytur  $N$ . Endurritum hliðarskilyrði:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

Til þess að finna stök  $X_B$  fylkisins í mögulegum lausnarpunkti er nóg að formargfalda með  $B^{-1}$ :

$$\begin{aligned} B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \end{aligned}$$

Í lausnarpunkti hafa allar non-grunnbreytur gildið 0 og þannig er  $B^{-1}Nx_N = 0$  og lausnargildi eru:

$$x_B = B^{-1}b \quad (1.5)$$

Ef við látum  $c_B$  vera vektor þeirra staka sem eru stuðlar í markfallinu fyrir ofangreind stök  $x_B$  fylkisins þá getum við fundið gildi markfalls í lausnarpunkti með:

$$Z = c_Bx_B = c_BB^{-1}b \quad (1.6)$$

Fyrir upprunalega jöfnuhneppi er fylkjaform vandamálsins eftirfarandi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

en þetta er í raun SIMPLEX taflan eins og hún var sett fram í kaflanum á undan. En hver eru tengsl milli fylkisins og töflunar þegar búið er að ýtreka? Við vitum að eftir hverja ítökun er  $x_B = B^{-1}b$  og  $Z = c_BB^{-1}b$ . Þar sem við framkvæmum sömu algebraaðgerðir báðum megin við jafnaðarmerkið verður hægri hliðin:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

og sama gildir um vinstri hlið:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_BB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Eftir hverja ítökun lítur jöfnuhneppið svona út:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

en þetta er í raun hin hefðbundna SIMPLEX tafla.

### 1.4.3 Samantekt

- Uppsetning: Sama og í upprunalegu aðferðinni
- Ítökun
  - Finna þá breytu sem fer inn í grunn (hvaða breyta gefur markfallinu mest)

- Finna þá breytu sem fer úr grunni. Sama og í uppr. aðferð nema hér þarf aðeins að reikna út stuðla þeirrar breytu sem er að fara í grunn, í öllum jöfnum og hægri hliðina fyrir þá jöfnu.
  - Finna nýju BF lausn: Leiða út  $B^{-1}$  og setja  $x_B = B^{-1}b$ .
- Hámörkunarpróf. Sama og í uppr.aðf. nema hér eru aðeins þær breytur sem nauðsynlegar eru reiknaðar, þ.e. stuðlar non-grunnsbreytna.

## Kafli 2

# Næmnisgreining<sup>1</sup>

Við vitum að út frá simplex töflu að fyrir mengi grunnbreytna er BV besta lausn e.f.f. hver skorða hefur óneikvæða hægri hlið og hver breyta hefur óneikvæðan stuðul í röð núll. Það geta verið tvær ástæður fyrir því að breytingar á stuðlum LP líkans orsaki að besta lausn breytist:

- Breyta í röð núll fær neikvæðan stuðul. Í þessu tilfalli er hægt að ná betri lausn með því að færa þá breytu sem hefur neikvæðan stuðul inn í grunn. Undir þessum kringumstæðum höfum við **suboptimal** grunn.
- Skorða (eða skorður) fær neikvæða hægri hlið. Í þessu tilfalli er talað um að BV verði **infeasible** grunnur.

Við skulum nú kanna hvernig næmnisgreining fer fram fyrir hvern flokk stuðla fyrir sig:

### 2.0.4 Breyting á stuðli ógrunnbreytu í markfalli

Hér skal kannað hvaða áhrif breyting á stuðli  $c_i$  hefur á bestu lausn. Vitum að  $B^{-1}$  og  $\mathbf{b}$  eru óbreytt og því hafa breytingar á stuðli  $c_i$  engin áhrif á hægri hlið BV töflunnar ( $B^{-1}\mathbf{b}$ ). Því verður BV feasible óháð breytum í  $c_i$ . BV verður því áfram besta lausn ef  $\bar{c}_i \geq 0$  (þ.e. stuðull reduced cost) en verður suboptimal ef að  $\bar{c}_i < 0$ .

Hægt er að kanna hvað  $c_i$  þarf að aukast mikið (m.v. hámarksvandamál) með því að leysa úr  $\bar{c}_i$  út frá  $\mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$ . Þær  $\Delta$  sem gera  $\bar{c}_i < 0$  kalla á nýja lausn en þær sem gera  $\bar{c}_i \geq 0$  viðhalda upphaflegri lausn.

Út frá þessum jöfnu má draga eftirfarandi fram: **Reduced cost fyrir ógrunnbreytu (í háms. vandamáli) er hámarksupphæð sem stuðull breytunnar í markfalli getur hækkað áður en að núverandi grunnur verður suboptimal. Ef grunnur verður suboptimal byggir ný lausn á því að færa viðkomandi ógrunnbreytu inn í grunn.**

### 2.0.5 Breytingar á stuðli grunnbreytu í markfalli.

Eins og hér að ofan breytist aðeins  $c_i$  og því eru hægri-hliðar-gildi óbreytt og uprunaleg lausn ávallt feasible. En þar sem við breytum  $c_{BV}$  þá breytist  $c_{BV} B^{-1}$

<sup>1</sup>Samantekt næmnisgreiningar má sjá á töflu 5.8 á bls 196 í *Wayne L. Winston: "Operations Research: Applications and Algorithms"*

og þannig geta fleiri en einn stuðull í jöfnu 0 breyst. Til þess að kanna áhrif breytingar á  $c_i$  setjum við  $c_i + \Delta$  inn í  $c_{BV}$  vektorinn, leysum út  $c_{BV}B^{-1}$  og finnum þau skilyrði á  $\Delta$  sem þarf til þess að öll stök  $c_{BV}B^{-1}$  séu óneikvæð.

### 2.0.6 Breytingar á stuðlum hægri hliðar í skorðum

Þar sem að  $\mathbf{b}$  hefur ekki áhrif á röð 0 geta breytingar á hægri hlið ekki orsakað að núverandi grunnur verður suboptimal. **Svo lengi sem hægri-hliðar gildi hveirrar skorðu í "bestu" töflu er óneikvætt þá er grunnur feasible og bestur. Ef a.m.k. eitt hægri-handar stak verður neikvætt þá er grunnur ekki lengur feasible og bestur.**

Til þess að kanna áhrif breytinga á  $b_i$  stingum við  $b_i + \Delta$  inn í  $\mathbf{b}$  fylkið og leysum út fyrir hægri-hliðar gildum, þ.e.  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ . Hægt er að finna gildi  $\Delta$  með því að setja það skilyrði að öll stök hægri hliðar verði að vera óneikvæð.

### 2.0.7 Ný starfsemi

Hér skal sýnt fram á hvernig kanna megi hvort ný starfsemi geti kallað fram nýja bestunarlausn. Hægri-hliðar-gildi breytast ekki þótt ný starfsemi sé tekin upp. Við sjáum einnig að upprunalegir stuðlar í jöfnu 0 eru óbreyttir. Það er því nóg að reikna hinn nýja stuðul  $\bar{c}_{N+1}$  og kanna formerki hans. Ef  $\bar{c}_{N+1} \geq 0$  þá vísar grunnur áfram á bestu lausn. Ef hins vegar að  $\bar{c}_{N+1} < 0$  þá er vísar grunnur ekki á bestu lausn og hin nýja lausn borgar sig.

## Kafli 3

# Flutningafræði

Flutningafræði byggir á því að finna hagkvæmstu leið við að flytja hluti frá uppsprettum að lokastöðum. Dæmi: höfum framleiðslustaði og markaði. Við búum við framleiðslugetu og eftirspurn. Við búum við kostnað og hagnað. Við erum því að ræða um sömu þætti og í hefðbundnum bestunarvandamálum.

Ákvörðun flutningsvandamál er: "Hve mikið á að flytja frá stað A til B með hámarks hagnaðar eða lágmarks tilkostnaði". Höfum ákvörðunarbreytur, skorður og kostnað.

Ritum upp sem LP verkefni

$Z$  = kostnaður eða hagnaður,  $x_{ij}$  = hve mikið á að flytja frá  $i$  til  $j$ .

### 3.1 Algrím fyrir lausn

- Setjum verkefnið upp í töfluform
- Ef verkefnið er ekki í jafnvægi  $\Rightarrow$  setjum það í jafnvægi
- Finnum upphafslausn (*basic feasible solution*)
- Bestum með ítrekun

### 3.2 Sýnidæmi

Þetta verkefni er ekki upp úr bókinni en ætti þó að vera ágætt kynningardæmi. Höfum 3 verksmiðjur og 3 viðskiptavinum. Hver viðskiptavinur er tilbúinn til að kaupa 100 stykki af framleiðsluvörnunni á þeirri tímaeiningu sem við erum að vinna með. Allar verksmiðjur framleiða sambærilegar vörur. Vöruframboð eftirfarandi:

$$\begin{array}{ll} \text{Verksmiðja 1} & 50 \text{ stk} \\ \text{Verksmiðja 2} & 100 \text{ stk} \\ \text{Verksmiðja 3} & 50 \text{ stk} \end{array} \quad (3.1)$$

Flutningskostnaður á einingu fer eftir því milli hvaða staða er verið að flytja: Hagnaður á sölueningu er settur fram í eftirfarandi töflu.

		Viðskiptavinur			
		A	B	C	
	1	75	60	69	(3.2)
Verksmiðjur	2	79	73	68	
	3	85	76	70	

Setjum fram markfallið

$$Max \quad 75x_{1A} + 60x_{1B} + \dots \quad (3.3)$$

Setjum verkefnið upp á töfluformi:

		Viðskiptavinur			
		A	B	C	
	1	75	60	69	50
Verksmiðja	2	79	73	68	100
	3	89	76	79	50
		100	100	100	300\200

Er verkefnið í jafnvægi? Sjáum að heildarframleiðslugeta er 200 en eftirspurn er 300. Við verðum því að leiðrétta fyrir þessu með því að bæta inn dummy framleiðanda. Fáum þá nýja töflu

		Viðskiptavinur			
		A	B	C	Samt
	1	75	60	69	50
Verksmiðjur	2	79	73	68	100
	3	85	76	79	50
	4	0	0	0	100
	Samt	100	100	100	300\300

Hægt er að beita ýmsum aðferðum við að leysa svona líkan. Hér verður þó aðeins farið í eina þeirra, norð-vestur regluna. Við förum í næsta skref, þ.e. finna upphafslausn. Byrjum í norðvesturhorninu og setjum X gildi eins hátt og við getum. Gætum þess að draga frá samtölum þegar X gildum er bætt inn í töfluna.

		Viðskiptavinur						
		A		B		C		Samt
Verksm.	X	verð	X	verð	X	verð	X	
1	50	75		60		69	50	
2	50	79	50	73		68	100	
3		85	50	76		79	50	
4		0		0	100	0	100	
Samt	100		100		100		300\300	

Þvínæst er komið að þriðja þætti algrípmans, ítrum. Finnum  $v_j$  og  $u_i$  fyrir allar raðir og dálka þannig að  $c_{ij} = u_i + v_j \forall i, j$  þar sem  $x_{ij}$  er grunnbreyta (*e. basic variable*). Það skiptir ekki máli hvar við byrjum því niðurstaðan verður ávallt sú sama. Við byrjum þar sem grunnbreytan er með hæsta gildi (A2). Höfum þekkt  $c_{ij}$  og þekkjum grunnbreytur. Fyrirþessar grunnbreytur finnum

við  $v$  og  $u$  m.t.t.  $c$ . Við getum ákveðið  $u$  og  $v$  frhendis með þeim fyrirvarar að jafnan hér að ofan sé uppfyllt:

Verksm.	Viðskiptavinur						$u_i$
	A		B		C		
	X	verð	X	verð	X	verð	
1	50	75	-9	60	+6	69	-4
2	50	79	50	73	+1	68	0
3	+3	85	50	76	+0	79	3
4	-12	0	-6	0	100	0	-67
$v_j$		79		73		67	

Er þetta besta lausn? Ef  $u_i + v_j \geq c_{ij} \forall$  breytur sem ekki eru í grunni þá er um bestu lausn að ræða. Ójöfnumerkið snýst við ef að um lágmarkarvandamál er að ræða. Til hagræðis var gildunum:  $u_i + v_j - c_{ij}$  bætt inn í töfluna með skáletri. Þessi gildi segja til um jaðarbreytingu markfallsgildis m.v. breytingu í viðkomandi breytu. Við getum því ályktað að um bestu lausn er að ræða e.f.f. enginn skáletraður stuðull er jákvæður. Þessi skilyrði má einnig draga saman í sér-töflu:

$$\begin{array}{rcllcl}
 & & & u & v & \\
 c_{1B} & 60 & \leq & -4 & 73 & \\
 c_{1c} & 69 & \geq & -4 & 67 & \\
 c_{2c} & 68 & \geq & 0 & 67 & \\
 c_{3A} & 85 & \geq & 3 & 79 & \\
 c_{4A} & 0 & \leq & -67 & 79 & \\
 C_{4B} & 0 & \leq & -67 & 73 & 
 \end{array} \tag{3.6}$$

Augljóst er að hér er ekki um bestu lausn að ræða. Því verður að velja nýja breytu inn í grunn og við veljum að jafnaði þá breytu sem hefur hæsta póstítíva stuðulinn samkvæmt töflu (magn sinnum verð). Eins og sést hér að ofan er breytan  $x_{2A}$  valin.

Næsta skref er að velja þá breytu sem fara á út úr grunni

TAFLA 3 - 4

Fara betur yfir

Við erum annarsvegar með transshipment (útfærsla á þessu, leysum alveg eins) og hinsvegar með assignment problem: við erum með starf og einn starfsmáður vinnur við hverja vél. Breytur í slíku vandamáli eru aðeins núll eða einn.

### 3.3 Aðferð Vogels

Setjum upp flutningsvandamál með formlegum hætti:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_j x_{ij} &= S_i, \forall i \quad m = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i x_{ij} &= D_j, \forall j \quad n = 4 \\ x_{ij} &\geq 0 \\ \sum_i S_i &= \sum_j D_j \end{aligned}$$

Gagnvirka líkanið er því:

$$Max \quad \sum_i S_i u_i + \sum_j D_j v_j$$

$$x_{ij} : u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Gagnvirka slakasambengið segir okkur að annaðhvort er skorðanbindandi og þá er  $x_{ij}$  pósítívt, eða hún er ekki bindandi og  $x_{ij}$  er þá núll. Þ.e.:  $x_{ij} \cdot (c_{ij} - u_i - v_j) = 0$ . En  $(c_{ij} - u_i - v_j) = 0$  fyrir breytur í grunni.f

Líkön skyld þessu eru t.d. notuð við hönnun og rekstur á hitaveitu.

### 3.4 Úthlutunarvandamál (assignment problem)

T.d.: Stundatöflukerfi, verkúthlutunarvandamál, úthlutun fluga til flugáhafna, úthlutun vakta til hjúkrunarfræðinga. Vandamálið má setja upp formlega á eftirfarandi hátt.

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} = 0, 1$$

□ Ef  $x_{ij}$  minimerar  $z = \sum \sum c_{ij} x_{ij}$  (og er feasible) þá minimerar  $x_{ij}$  einnig  $z' = \sum \sum c'_{ij} x_{ij}$  þar sem að  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ .

□ Lagrange fallið:

$$L = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i u_i \left( 1 - \sum_j x_{ij} \right) + \sum_j v_j \left( 1 - \sum_i x_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned} z' &= \sum \sum (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = \\ &= z - \sum_i u_i 1 - \sum_j v_j 1 \\ &= Z - f_{asti} \end{aligned}$$

þ.e. Lagrange fallið er það sama og upphaflega vandamálið hliðrað til.

### 3.4.1 Umgverska aðferðin

- Drögum frá línunum og dálkum þannig að minnsta tala fylkisins sé núll
- Erum komin í bestu lausn ef að assignment verða öll núll. Þekjum öll núll með línunum yfir fylkið. Ef fjöldi lína er jafn fjöldi úthlutana þá erum við komin í bestu lausn.
- Finnum lægstu tölu sem er ekki yfirstrikuð og drögum hana frá línu eða dálki, bættum við aðrar línur eða dálka þannig að ekkert stak verði neikvæðtt.

(ljósrit af glæru væntanlegt).

### 3.5 Niðurskurður - dæmi

Þessi vandamál eru kölluð "cutting stock". Þau eru náskyld "packing" vandamálum. Aðferðafræðin byggir á því að setja fram tillögur að mynstrum bygðum á þeim stærðartölum sem spurn er eftir. Skilgreinum  $x_j$  = fjöldi tilvika sem að munstur  $j$  er notuð (=fjöldi rúlla skorin með munstri númer  $j$ ). Setjum upp markfall:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{j=1}^{12} a_j x_j \\ PU45CM &: x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + x_9 + 2x_{10} + 3x_{11} + 4x_{12} \geq 500 \\ PC25CM &: 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 8x_8 + \dots \geq 300 \\ P60CM &: 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + \dots \geq 200 \end{aligned}$$

Ath: að einnig er hægt að lágmarka fjölda rúlla. Það hvor aðferðin er rétt fer eftir því hvort hægt sé að selja þær stærðir sem eru söluhæfar (45,25,60 cm) en verða afgang.

## Kafi 4

# Netlíkön

Helstu hugtök:

- Hnútar (nodes)
- Greinar (arcs)
- Stefna, flæði
- Flutningsgeta, kostnaður (lengd)
- Leið (path) = röð greina
- Hringleið (cycle)
- Tré = tengt net án hringleiða
- Spanntré, tré allra hnúta.

### 4.1 Minnsta spönn (spannartré)

Dæmi: Þurfum að leggja ljósleiðara á háskólasvæði. Það eina sem skiptir máli er að allir hnútar séu tengdir. Algrím er eftirfarandi:

- Vel einhvern byrjunarhnút
- Vel næsta ótengdan hnút við einhvern tengdan þar sem að fjarlægð er minnst.
- Ýtrum þar til að lausn er fundin

Allir punktar verða tengdir með minnsta tilkostnaði/vegalengd og engin hringleið er til. Til eru fleiri spannartré en þetta tré er minnsta spannartré. Spannartré er grunnlausn í Simplex aðferð.

## 4.2 Stysta leið (e. *shortest path*)

Hver er stýðsta leið frá upphafspunkti til lokapunkts. Dæmi: hvernig á bifreið að aka í gegn um vegakerfi að ákveðnum áfangastað. Þetta leysum við með því að hugsa í tengdum og ótengdum hnútum:

	Tengdir hnútar	Næstu ótengdir	Vegalengd frá upphafi	n-ti næsti frá O	Min vegalengd	Tenging
1	O	A	2	A	2	$O \rightarrow A$
2,3	O	C	4	C	4	$O \rightarrow C$
	A	B	2+2	B	4	$A \rightarrow B$
4	A	D	2+7			
	B	E	4+3	E	7	$B \rightarrow E$
	C	E	4+4			
5	A	D	2+7			
	B	D	4+4			
	E	D	7+1	D	8	$E \rightarrow D$
6						

Aðferðin býr til ýmsa möguleika með gráðugum hætti en hættir við að nota ýmsa möguleika ef þeir reynast óhagkvæmnir.

## 4.3 Mesta flæði (e. *maximal flow*)

Hvað er mesta flæði sem hægt er að senda í gegn um netið. Tölurnar á greininum tákna nú burðargetu.

- Veljum einhverja leið af handahófi í gegn um netið.
- Finnum afgangsafkastagetu á hverri leið. Lækkum hverja upphafstölu um afgangsafkastagetinua og hækkum lokatölu um sömu upphæð.
- Ýtrum áfram

Hvenær erum við komin í hámark?

- Ef við finnum enga nýtanlega leið þá erum við komin í hámark
- Tökum snið:  
Ef við getum ritað línu yfir þær burðarlínur sem eru 0 og að þess lína skilur að upphafspunkt og lokapunkt þá erum við komin í hámark. Minnsta sniðið er flöskuhálsinn.

## 4.4 Önnur líkön

- Travelling salesman problem
- Útkeyrsla (vehicle Routeing)  
Þetta er svipað og TSP nema hvað þarna geta verið margir flutningabílar að klára eitt svæði

- Flutningar
- Úthlutun
- Umskipun

## 4.5 Línuleg bestun

$x_{ij}$  = flú frá hnúti  $i$  til  $j$ . Summan af öllum xum sem fara inn í hnút verður að vera jöfnu summu út úr sama hnúti, þ.e.:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = b_i$$

Vandamálið er því að lágmarkaæða hámarka:

$$\min \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

## 4.6 CPM

CPM er aðferðarfræði sem beitt er til þess að skipuleggja verkefni, finna heildartíma þeirra og þá verkþætti sem eru krítískir (þ.e. geta tafið heildarverktíma). Eftirfarandi reglur gilda um uppsetningu CPM

- Hnútur 1 er upphaf verkefnisins. Grein liggur frá hnúti 1 til þess að túlka verkþátt sem hefur engan undanfara.
- Hnútur sem táknar lok verkefnisins (lokahnútur) verður að vera með í CPM
- Hnútar eru tölusettir þannig að hnútur sem táknar lok verkþáttar hefur ávallt hærri tölu en hnútur sem táknar upphaf verkþáttar.
- Verkþáttur er settur fram með einungis einni grein, ekki fleiri.
- Tveir hnútar geta í mesta lagi verið tengdir með einni grin.

Til þess að komast hjá því að brjóta síðustu tvær reglurnar getur verið nausynlegt að setja fram gerviverkþátt sem tekur engan tíma. Tvö hugtök leggja grunnin að CPM

### 4.6.1 Fyrsti tími

Fyrsti tími fyrir atburð  $i$ , táknaður sem  $ET(i)$ , er sá (vænti) tími sem að atburður á sér stað ef að byrjað hefur verið á fyrri verkþáttum eins fljótt og kostur er. Fyrsti tími fyrir hvern atburð er reiknaður þannig að fyrir við reiknum fyrsta tíma allra undanfara og bætum við tíma hvers verkþáttar og veljum þá tölu sem er hæst. Þetta er fyrsti tími atburðar.

### 4.6.2 Síðasti tími

Síðasti tími atburðar  $i$ , táknaður með  $LT(i)$ , er (væntur) síðasti tími sem að atburður getur átt sér stað án þess að verklokum seinki frá fyrsta mögulega tíma. Síðasti tími er reiknaður þannig að fyrir hvern atburð finnum við síðastu tíma eftirfara og drögum verkþáttatíma frá. Síðasti tími atburðar er lægsta talan sem kemur út.

### 4.6.3 Slaki atburðar

Slaki atburðar er munurinn á fyrsta og síðasta tíma

### 4.6.4 Slaki verkþáttar

Slaki verkþáttar  $(i,j)$  er  $L_j - (E_i + t_{ij})$ , þar sem að  $L_j$  er síðasti tími atburðar  $j$ ,  $E_i$  er fyrsti tími atburðar  $i$ , og  $t_{ij}$  er væntur tími verkþáttar  $(i,j)$ .

### 4.6.5 Critical path

Critical path verkefnisins er braut milli hnúta þar sem að allir verkþættir hafa slaka upp á núll. Einkenni critical paths eru eftirfarandi:

- Verkefni hefur ávallt critical path, stundum fleiri en einn.
- Allir verkþættir sem hafa engan slaka liggja á critical path. Þeir verkþættir sem hafa jákvæðan slaka geta ekki legið á critical path.
- Allir atburðir með engan slaka liggja á critical path. Þeir atburðir sem hafa jákvæða slaka geta ekki legið á critical path.
- Leið í gegn um net sem liggur á atburðum sem hafa engan slaka er ekki nauðsynlega critical path þar sem einn eða fleiri verkþáttur á leiðinni getur haft slaka stærri en núll.

## 4.7 PERT

Pert greining leyfir skipuleggjendum að gera ráð fyrir óvissu í verkefnaskipulagningu.

## Kafli 5

# Heiltölubestun

Línuleg föll (NLP), engar slambur (SP) og heiltölubreytur

### 5.1 Dæmifjárfestingar

	Verslun		Birgðarstöð	
	R	A	R	A
NPV	$7x_1 +$	$9x_2 +$	$5x_3 +$	$4x_4$

Vandamálið er því:

$$\begin{aligned} \max \quad NPB &= 7x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{m.t.t} \quad &: 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 6 \end{aligned}$$

Hliðarskilyrðið er skorða fjármagns. Þetta er svokallað bakpokavandamál (þ.e. hvaða hluti á að taka með í bakpoka). Hugsum okkur að það séu fleiri skorður, t.d. að það sé ekki hægt að vera með birgðarstöð nema verksmiðja sé til staða. Þessi skilyrði má setja fram sem:

$$x_3 \leq x_1, \quad x_4 \leq x_2$$

Ef við setjum það skilyrði að ein og aðeins ein verksmiðja verði reist:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Ef við viljum hafa a.m.k. eina birgðarstöð:

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

#### 5.1.1 Náskyld dæmi: Námsval

Nemandi er með binary breytu fyrir hvert fag. Ef eitt fag er háð því að annað sé klárað má setja undanfaraskilyrði  $x_3 \leq x_1$ . Ef við ætlum að velja 30 einingar yfir veturinn getum við sett skorðu  $3 \cdot \sum x_1 \geq 30$ .

### 5.1.2 Dæmi: Staðarval

Byrjum á því að setja fram flutningalíkan. Hugsum að  $S_i$  sé afköst potential verksmiðjustaðsetningar en við höfum ákveðið að reisa ákveðið margar fjárfestingar. Skilgreinum  $Y_i$  sem eru binary breytur þar sem hver breyta er 1 ef það er reist verksmiðja en 0 annars. Skilgreinum fastan kostnað  $F_i$ .

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i F_i Y_i$$

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} &\leq S_i Y_i \\ \sum_j X_{ij} &\geq D_j \\ X_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Hægt er að bjóða upp á nokkrar tegundir af verksmiðjum með:

$$\sum_j x_{ij} \leq S_i^1 Y_i^1 + S_i^2 Y_i^2 + \dots \quad (5.1)$$

Ef við viljum að önnur hvor að tveimur skorðum gildi getum við sett fram með heiltölubestun. Höfum t.d. eftirfarandi skorður:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 &\leq 5 \end{aligned}$$

Leyfum nú annari að gilda en ekki báðum:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 + My_1 \\ 2x_1 &\leq 5 + My_2 \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

### 5.1.3 Dæmi: lotuskipulag (uppsetningartími)

Ef einhvað er framleitt fellur á uppsetningarkostnaður. Ef ekkert er framleitt er þessi kostnaður enginn. Setjum upp:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum (c_t \cdot x_t + h \cdot i_t + Ky_t) \\ i_t &= i_{t-1} + x_t - d_t \\ x_t &\leq F \cdot y_t \\ x_t &\geq 0, \quad y_t = 0/1 \end{aligned}$$

## 5.2 Branch and Bound

Tökum sem dæmi eftirfarandi líkan:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{m.t.t} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 \leq 5 \\ & x_j = \text{heiltölur} \end{aligned}$$

Aðferð þessi byggir á slökun (*relaxation*). Slökum á kröfunni um heiltölur og hámarksorkum í upphafi með LP. Fáum lausnina:  $x_1 = 2.5$ ,  $x_2 = 1.1$  og  $z = 6.6$ . Ef maður er heppinn lendir maður í heiltölum og er þá lausn fundin. Hér er ekki um slíkt að ræða.

Tökum fyrir aðra breytuna og kvíslar henni upp í tvö tilvik, þ.e. næstu heiltölur sitt hvoru megin við:

$$\begin{aligned} \text{Tilvik1} & : X_1 \geq 3 \Rightarrow \text{engin lausn (infeasible)} \\ \text{Tilvik2} & : X_1 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1.5, z = 5.5 \end{aligned}$$

Köllum  $z = 6.6$  efra mark. Víst að línuleg bestun gaf 6.6. getur heiltölubestun ekki gefið hærra gildi. Við sjáum að í tilvik 2 er  $z = 5.5$  og er það nýtt efra mark ( $z_u$ ).

Kvíslum nú eftir breytu  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Tilvik1} & : X_2 \leq 1 \Rightarrow X_1 = 2, X_2 = 1, Z_L = 5 \\ \text{Tilvik2} & : X_2 > 2 \Rightarrow X_1 = 1.33, X_2 = 2, Z_U = 4.67 \end{aligned}$$

Tilvik 1 lýsir mögulegri bestu lausn og því er  $Z$  skilgreint sem neðri mörk. Í prinsippinu ætti að kvísla tilvik 2 áfram en þó er það ekki nauðsynlegt þar sem eftir mörk tilviks 2 eru lægri en neðri mörku mögulegrar lausnar tilviks 1.

### 5.2.1 Samantekt

- Einhver strategía verður að vera til að greina og kvísla (t.d. taka þær breytur sem ekki eru heiltölur)
- Verðum að geta reiknað mörk  $Z_u, Z_l$ . Gerum það hér með slökun
- Skygging. Hvenær er hægt að skyggja ákveðna hluta trésins, t.d. engin lausn, heiltölulausn eða eftri mörk eru minni en einhver leyfileg neðri mörk, þ.e.  $Z_u < Z_L$ .

### 5.2.2 Assignment (úthlutun):

	1	2	3	4
A	5	1	3	2
B	6	3	4	5
C	2	5	1	3
D	4	4	2	5

Lágmörkum töfluna. Nú er hægt að kvísla með t.d. eftirfarandi leiðum:

A1, B1, C1, D2

A1, A2, A3, A4

Hver er lægsta mögulega markfall jafnvel þótt að lausnin sé ekki feasible? Summum saman lægstu tölur í hverjum dálki:  $2 + 1 + 1 + 2 = 6$ . Þetta eru lægri mörk vandamálsins.

Tökum hverja hvísl, veljum röð og dálk og setjum verkefni. Reiknum möguleg lægri mörk á afgangnum og leggjum við kostnað viðkomandi verkefnis.

Ef það að taka minnstu gildi gefur leyfilega lausn þá erum við búin að finna upper bound.

## Kaflí 6

# Biðraðafraeði

### 6.1 Inngangur

Gerum ráð fyrir því að komur eigi sér stað (fólk, bílar) að ákveðnu kerfi. Þessar einingar geta lent í bið fyrir framan afgreiðslu eða jafnvel verið vísað frá. Einingar sem fá afgreiðslu yfirgefa kerfið sem brottfarir. Biðkerfi eru opin ef ekki einingar sem eru ekki í bið eða afgreiðslu eru fyrir utan kerfið. Á sama hátt er kerfi kallað lokað þegar að fjöldi eininga er fastur og þær eru ávallt allar innan kerfisins.

- **Afgreiðslutíðni/geta**  $\mu_n$
- **Komutíðni**  $\lambda_n$
- **Stöðubreyta**  $n$   
Fjöldi eininga í kerfinu. Afgreiðslutíðni og komutíðni geta verið háð stöðubreytunni.
- **Fjöldi afgreiðenda**  $s$

Við þurfum að gefa okkur mikilvægar forsendur til þess að geta ráðið við útreikninga í biðraðafraeði:

- **Poisson ferli**  
Bæði komur og brottfarir eru Poissondreifðar. Af þessu má leiða að millikomutímar eru  $EXP(\lambda_n)$  og afgreiðslutímar  $EXP(\mu_n)$
- **Kerfi verður að ná jafnvægi (stochastísku)**  
Talað er um svipult ástand (transient) þegar biðröð eykst og eykst en stöðugt ástand (steady state) þegar biðröð er að meðaltali í einhverju jafnvægi.

Þær kennistærðir sem við höfum áhuga á að reikna út:

- **Nýting afgreiðslu**  $\rho = \lambda / (s \cdot \mu)$  (álag)
- **Meðalfjöldi í kerfinu**  $L$
- **Meðalfjöldi í bið**  $L_q$   
Við getum því ályktað:  $L = L_q + \text{fjöldi í afgreiðslu}$ .

□ **Meðaltími í kerfinu (dvalartími)  $W$**

□ **Meðalbiðtími  $W_q$**

Ef við gerum ráð fyrir því að meðalgildi afgreiðslutíma er fasti  $(1/\mu) \forall n \geq 1$  þá má leiða út að:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Maður að nafni Little sannaði eftirfarandi jöfnur:

$$\begin{aligned} L &= \lambda \cdot W \\ L_q &= \lambda \cdot W_q \end{aligned}$$

Ef að  $\lambda_n$  er ekki fasti þá verðum við að skipta  $\lambda$  út með  $\bar{\lambda}$  sem stendur fyrir meðalaðkomu til langs tíma.

## 6.2 Dreifingar

### 6.2.1 Veldisdreifingin

Fyrir veldisdreifinguna er tíðnifallið:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (6.1)$$

og þéttifallið er:

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Fyrstu moment dreifingarinnar eru:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \sigma(t) \quad (6.2)$$

$$var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (6.3)$$

Helstu eiginleikar veldisdreifingarinnar eru:

□ **Minnisleysi**

$$P\{T > t + \Delta t | T > \Delta t\} = P\{T > t\} = \lambda e^{-\lambda t}$$

□ **Lágmarksgildi nokkura óháðra exp slembistærða hefur exp dreifingu**

$$\min\{T_1, T_2, \dots, T_n\} \in Exp(\Sigma \lambda_i)$$

□ **Óháð samantekt eða sundurliðun**

Ef að mörg ferli eru sameinuð í eitt (agregation) verður biðtími í hinu nýja ferli einnig exp dreifður. Ef eitt ferli er sundurliðað í mörg önnur með handahófskenndum hætti verður einnig exp.

## 6.2.2 Poisson dreifing:

Tíðnifalli Poisson dreifingar er:

$$P\{X = n\} = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$

## 6.3 Stökkrit

Í einföldum biðraðalíkönnum er gert ráð fyrir því að aðkoma og afgreiðsla fari eftir fæðingar-dauða ferli. Fæðing er hugtak yfir aðkomu nýrrar einingar inni í kerfi og dauði lýsir brottfari einingar út úr kerfi. Stöðu kerfisins á tíma  $t$  ( $t \geq 0$ ), táknað með  $N(t)$  er fjöldi eininga í kerfinu á tíma  $t$ . Fæingar-dauða ferillinn lýsir því með líkindum hvernig  $N(t)$  mun breytast þegar að tíminn líður. Ferillinn byggir á því að einstaka fæðingar/dauði er slembinn þar sem að meðalgildi fjölda á tímaeiningu veltur aðeins á núverandi stöðu kerfisins. Forsendurnar fæðingar-dauða kerfisins eru eftirfarandi:

- Að gefnu  $N(t) = n$  þá eru líkindafall þess tíma sem líður að næstu aðkomu EXP dreift með stika  $\lambda_n$ .
- Að gefnu  $N(t) = n$  þá er líkindafall þess tíma sem líður að næstu brottför EXP dreift með stika  $\mu_n$ .
- Slembibreytur fyrir aðkomu og brottflutning eru óháðar. Næsta breyting í kerfinu eru því annaðhvort eða:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n + 1 && (\text{aðkoma}) \\ n &\rightarrow n - 1 && (\text{brottför}) \end{aligned}$$

Vegna þessa forsenda er fæðing-dauða ferill sértækt tilfelli af Markov keðjum í samfelldum tíma. Þar sem að við gerum ráð fyrir steady-state kerfi verður eftirfarandi að gilda:

$$\text{Meðaltal aðkoma} = \text{Meðaltal brottfara}$$

Hugsum okkur stöðu  $n = 0$ . Aðeins er hægt að komast í þessa stöðu frá stöðu 1. Látum  $P_1$  tákna hluta þess tíma sem það er mögulegt fyrir ferilinn að fara inn í stöðu 0. Að því gefnu að kerfið sé í stöðu 1 þá er meðaltíðni þess að fara í stöðu 0  $\mu$ . Fyrir allar aðrar stöður er þessi tíðni 0. Við getum ritað þetta:

$$\mu_1 P_1 + 0(1 - P_1) = \mu_1 P_1$$

Með sömu röksemdafærslu má sjá að meðaltíðni brottfara verður að vera  $\lambda_0 P_0$  og því verður jafnvægisjafna stöðu 0 eftirfarandi:

$$\lambda_1 P_1 = \lambda_0 P_0$$

Fyrir allar aðrar stöður eru tvær mögulegar kerfisbreytingar bæði inn og út úr stöðunni. Því er hver hlið jafnvægisjafnanna summa með

Hugsum okkur ákveðnar stöður. Snið:  $\mu_i P_i = \lambda_0 \cdot P_0$  :

$$\mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0 = \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1$$

Getum tekið saman fyrir öll ástönd:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0 = C_1 P_0 \\ P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \cdot P_0 = C_2 P_0 \\ P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1} \cdot P_0 = C_n P_0 \end{aligned}$$

Vitum að líkindi summerast upp í einn, þ.e.:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n &= 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 &= 1 \\ P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} \end{aligned}$$

Vitum þá einnig að:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\ L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n \\ \bar{\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n \end{aligned}$$

## 6.4 Dæmium einfalt kerfi:

Vitum að:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{\mu} < 1 \\ C_n &= \rho^n \\ P_n &= \rho^n P_0 \\ P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho \\ P_n &= \rho^n (1 - \rho) \end{aligned}$$

Gefum okkur:

$$\frac{1}{\mu}$$

## 6.5 Net biðkerfa

Við getum tengt biðkerf saman þannig að þau myndi net. Skilgreinum  $r_i =$  aðkomur,  $p_{ij} =$  stökkklíkur. Gerum ráð fyrir því að stöð  $j$  er hreint biðkerfi (þ.e. engar frávisanir). Ástæðan fyrir því að við veljum hrein biðkerfi er sú að meðan hver hnútur er hreint biðkerfi gilda forsendur aggregation og sundurliðun um biðkerfin. Þ.e. samanlög markovferli inn  $\Rightarrow$  markovkerfi út. Ef um brottvísun er að ræða í kerfi þá verður afgreiðsla ekki markovferli.

Gerum nú ráð fyrir  $M/M/S_j/GD/\infty/\infty$ . Þær einingar sem eru að meðaltali inni í kerfinu eru:  $L = \sum L_j$ . Höfum einnig áhuga á því að finna  $\bar{\lambda} = \sum_j r_j$  ( $=\lambda$  því engar brottvísanir). Höfum áhuga á heildardvalartíma í kerfinu:  $W = L/\bar{\lambda}$ . Við fáum að lokum eftirfarandi niðurstöðu fyrir aðstreymi inn á hvern afgreiðslustað:

$$\lambda_j = r_j + \sum_i P_{ij} \cdot \lambda_i \quad (6.4)$$

En þessi jafna er grundvöllur fyrir því að hægt sé að leysa netkerfi á hagkvæman hátt.

## 6.6 Lokuð kerfi

## 6.7 Ákvaðarnafræði

Fyrirtæki stjórnar ákveðnu biðraðakerfi vill lágmarka kostað:

$$\begin{aligned} \text{kostn} &= C_w L_q + C_s (S - H) + (C_w + C_s) \cdot H \\ &= C_w (L_q + H) + C_s (S - H + H) \\ &= C_w \cdot L + C_s \cdot S \end{aligned}$$

þar se að  $L_q = \lambda \cdot W_q$ ,  $(S - H)$  er iðjuleysi og  $(C_w + C_s)$  er kostnaður við afgreiðslu.  $C_w \cdot L + C_s (S - H)$  er þá kostnaður við bið og iðjuleysi.

Við getum einnig sett vandamálið upp:

$$\begin{aligned} & \text{Max } P \cdot \bar{\lambda} - C_s \cdot S - C_w \cdot N \\ &= P \cdot \lambda J(S, N) - C_s S - C_w N \\ &= (P \cdot \lambda - C_w) \cdot J(S, N) - [C_s (S - H) + C_w L_q] - [(C_w + C_s) \cdot H] \end{aligned}$$

þar sem að  $[C_s (S - H) + C_w L_q]$  er kostnaður við við bið og iðjuleysi en  $[(C_w + C_s) \cdot H]$  er kostnaður við afgreiðslu.

Við getum sett upp vandamálið á enn einn hátt:

$$\max \frac{P \cdot N}{W_q(S, N) + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}} - C_s \cdot S - C_w N$$

## 6.8 Einfalt dæmi- ráðherrabílar.

Gerum ráð fyrir eftirfarandi forsendum:

$$N = 10 \quad \frac{1}{\mu} = 30\text{mín} \quad \frac{1}{\lambda} = 90\text{mín}$$
$$X = \frac{30}{90 + 30} = 0.25$$

$$F = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + W_q}$$

Vitum út frá töflum af:

S	F
6	0.999
5	0.992
4	0.983
3	0.929
2	0.753

Gefum okkur þá forsendu að þeir séu að gera einhvað af viti meðanþeir eru í biltúrnum:

S	$W_q$	C	$\bar{\lambda}$	$L_q$	H	S-H	$C_w \cdot L_q + C_s (S - H)$
6	0,12	120.12	0.083	0.01	2.5	3.5	7.1
5	0,24	120.24	0.083	0.02	2,49	2.51	5.2
4	2,05	122.05	0.082	0.17	2,46	1.54	4.8
3	9,20	129,2	0.077	0.71	2.31	0.69	8.5
2	38	158	0.064	2.4	1.9	0.1	24

Lesið  $\lambda$  og eða  $\mu$  er háð  $n$  bls 692-. Skoðið einnig nonexponential forsendur 696. Sleppið kafla um "priority" 705-708. Lesið vel net 709 -. Að lokum skal lesa kafla 16 sem fjallar um kostnaðarföll og bestun.

Iceland, verður farið í næsta miðvikudag.

Vegagerðardæmi sem heimadæmi þrettán

## Kafli 7

# Birgðarstýring

- Í framleiðsluferlum (WIP)
- Áformuð birgðasöfnun
- Lotubirgðir (Deterministic)
- Öryggisbirgðir
- Framleiðslulotur (fullunnar vörur)
- Innkaup (hráefni)

Ef við merkjum cumulative sum veltu einstakra vöruflokka þannig að veltumestu vörur koma fyrst þá fáum við kúrvi sem lýtur Pareto-lögmáli, þ.e. 20% af vörunum gefa okkur 80% af veltunni. Merkjum þrjú svæði þar sem A er 20% af vörum (80% af veltu, B er 20-60% og C er 60-100%). Greining á þessum svæðum kallast ABC greining. Hér verður einblínt á svæði A.

Skilgreinum eftirfarandi stærðir:

- $K$  = lotukostnaður (pöntunarkostnaður eða uppsetningarkostnaður)
- $h$  =  $i \cdot C$  = Birgðarkostnaður
- $C$  = innkaupsverð (kt/stk) (eða framleiðslukostnaður)
- $i$  = reiknivextir (kr/kr/ár) aðallega fjármangsvextir (fórmarkostn)
- annað : geymslukostn, tryggingar, rýrnun, hnuþl og úrelding.
- $P$  = vöntunarkostnaður (erfitt að meta)
- $a$  = árleg notkun / eftirspurn (stk/ári)

Við getum nú myndað heildarkostnaðarfallið.

$$TC(Q) = K \cdot \frac{a}{Q} + h \cdot \frac{q}{2} + c \cdot s$$

$a/Q$  = fjöldi pantana,  $q/2$  = meðalbirgðir og  $c \cdot a$  er velta.

Markmiðið er að lágmarka ofangreint kostnaðarfall m.t.t.  $Q$  = pöntunarmagn/lotustærð (stk/lotu). Diffurum og fáum eftirfarandi f.g.s:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot a}{h}}$$

Þessi formúla er kölluð Wilsons formúla. Finnum heildarkostnað með því að stinga Wilson inn:

$$\begin{aligned} TC &= \sqrt{\frac{1}{2}Kah} + \sqrt{\frac{1}{2}Kah} \\ &= \sqrt{2KAH} \end{aligned}$$

## 7.1 Dæmi - framleiðsla

Gefum okkur eftirfarandi forsendur:

$$\begin{aligned} a &= 500\text{stk/ári} \\ K &= 5000 \text{ kr/lotu} \\ C &= 400 \text{ kr/stk} \\ i &= 20\% \Rightarrow h = 80 \end{aligned}$$

Við lágmörkum kostnað með formúlu Wilson:

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{80}} = 250 \text{ stk/lotu} \\ N &= \frac{a}{Q} \end{aligned}$$

Ef að fyrirtæki framleiðir ekki samkvæmt hagkvæmstu lausn hversu hátt er hlutfall óþarfa kostnaðar:

$$\frac{TC(Q)}{TC(Q^*)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right]$$

Ef fyrirtækið pantar t.d. 500 stk í lotu þá er kostnaður 25% hærri:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{250}{500} + \frac{500}{250} \right] = 1.25 \quad (7.1)$$

## 7.2 Fjármagn á pöntun

Hugsum okkur margar vörur þar sem pantanir eru óháðar. Gerum ráð fyrir því að sömu reiknivextir og sami pöntunarkostnaður gildi fyrir allar vörur. Heildarpantanafjöldi á ári er því:

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \frac{a_i}{Q_i^*} = \sqrt{\frac{i}{K}} \cdot \sum \sqrt{\frac{a_i \cdot c_i}{2}}$$

Heildarfjármagn bundið í birgðum er:

$$F = \sum_i F_i = \sum_i C_i \cdot \frac{Q_i^*}{2} = \sqrt{\frac{K}{i}} \cdot \sum \sqrt{\frac{a_i \cdot c_i}{2}}$$

Ef við margföldum  $N \cdot F = \text{fasti}$ . Við getum teiknað þessa línu inn á (F-N) graf. og kallast hún lega bestu lausnar.

Við getum umritað heildarkostnaðarfall:

$$TC = K \cdot N + iF \tag{7.2}$$

Í bestu lausn er  $KN = iF$

$$F = \frac{k}{i} \cdot N$$

Mikilvæg mistök birgðarstjórnenda eru þau að nota sama pöntunarmynstur fyrir allar vörur. Fyrirtæki í bandaríkjunum notuðu bæði meira fjármagn og höfðu fleiri pantanir en lega bestu línu. Þessi fyrirtæki eiga að geta lækkað fjármagnskostnað og minnka pantanir með því að fístillta hverja vöru fyrir sig.